

PROYECTO FIN DE CARRERA

Presentado a

**LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

Para obtener el título de

INGENIERO ELECTRÓNICO

por

Marco Antonio Martínez Ramírez

Síntesis de Sonido Digital de un Instrumento de Viento Usando el Método de la Transformación del Funcional

Sustentado el día mes de año frente al jurado:

Composición del jurado

- *Asesor:* Alfredo Restrepo Palacios, Profesor Asociado, Universidad de Los Andes
- *Jurados :* Mario Valderrama, Profesor Asociado, Universidad de Los Andes
Sandro Carrero, Profesor Asistente /Universidad Nacional

Contenido

1	Introducción	3
2	Objetivos	4
2.1	OBJETIVO GENERAL.	4
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	4
2.3	ALCANCE Y PRODUCTOS FINALES	4
3	Metodología.....	5
4	Trabajo Realizado.....	5
	Parte I – Métodos de Síntesis basados en el Sonido	5
4.1.1	SÍNTESIS GRANULAR	6
4.1.2	SÍNTESIS POR TABLA DE ONDAS.....	6
4.1.3	SÍNTESIS ADITIVA	7
4.1.4	SÍNTESIS SUSTRACTIVA	7
4.1.5	SÍNTESIS FM.....	8
	Parte II – Descripción Física de los Instrumentos de Viento.	8
4.2.1	DESCRIPCIÓN FÍSICA DE INSTRUMENTOS MUSICALES	8
4.2.2	RESONADORES ACÚSTICOS	10
4.2.3	LA FLAUTA SIMPLE	10
	Parte III – Ecuaciones Diferenciales Parciales en un Instrumento de Viento.....	13
4.3.1	ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN UN INSTRUMENTO DE VIENTO	13
4.3.2	FRECUENCIAS BÁSICAS DE LA FLAUTA	14
	Parte IV – Métodos de Síntesis de Sonido Basados en el Modelado Físico	15
4.4.1	MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS	15
4.4.2	MÉTODO DE GUÍAS DE ONDAS DIGITALES	16
4.4.3	MÉTODO DE LA SÍNTESIS MODAL	17
	Parte V – El Método de la Transformación del Funcional.....	18
4.5.1	PRINCIPIOS DEL MÉTODO DE LA TRANSFORMACIÓN DEL FUNCIONAL	18
4.5.2	TRANSFORMACIÓN DEL FUNCIONAL APLICADO A PDES ESCALARES	20
	Parte VI – Aplicación de la Transformación del Funcional a un Instrumento de Viento.....	21
4.6.1	TRANSFORMADA DE LAPLACE	22
4.6.2	TRANSFORMADA DE STURM-LIOUVILLE	23
4.6.3	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA MULTI-DIMENSIONAL	24
4.6.4	DISCRETIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA MULTI-DIMENSIONAL	25
4.6.5	TRANSFORMACIÓN INVERSA DE STURM-LIOUVILLE	27
4.6.6	IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL	28
5	Discusión y Conclusiones	31
6	Agradecimientos	32
7	Referencias.....	32
8	Apéndices.....	33
	Apéndice A – Código Matlab.....	35

1 Introducción

La síntesis de sonido consiste en crear sonidos a partir de un medio no acústico, ya sea de forma analógica o digital. Existen varios métodos de síntesis, entre los basados en sonido encontramos la síntesis por tabla de ondas, la síntesis por modulación frecuencial (FM), la síntesis mediante el modulado espectral (aditiva y sustractiva), la síntesis granular. Y entre los basados en modelos físicos encontramos el método de diferencias finitas (Finite difference method), el método de Guías de Ondas Digitales, la síntesis Modal, y el método de la Transformación del Funcional.

El modelado físico, a diferencia de otros métodos no intenta emular el sonido final del instrumento, sino que emula el instrumento en sí, lo cual garantiza un resultado más parecido al instrumento real. Sin embargo el problema con el que se encontró este método es que requiere una capacidad de procesamiento muy grande, la cual en las décadas pasadas no se encontraba disponible. Actualmente la capacidad de procesamiento de los computadores permite la implementación de este tipo de síntesis en tiempo real, y está siendo utilizada en varios programas de síntesis para computadoras.

La elección del modelado físico se basa fundamentalmente por el realismo que se puede obtener al realizar este método, y más que todo, porque la síntesis obtenida hasta el momento en instrumentos de viento (flautas, saxofón, etc.) no es muy similar al sonido real y cualquier oyente puede darse cuenta que se trata de una síntesis por computadora. Otro aspecto importante que cabe destacar, es que mediante este tipo de síntesis se pueden modificar parámetros físicos del instrumento, dándonos la oportunidad de crear instrumentos imposibles físicamente (una flauta de longitud infinita, un tambor de dimensiones enormes).

Las técnicas de modelado físico se pueden agrupar en dos categorías: técnicas de dominio temporal y técnicas de descomposición modal. Las técnicas de dominio temporal abarcan los métodos de Digital Waveguide, Finite Difference Time Domain. Las técnicas de descomposición modal ofrecen los métodos de Síntesis Modal, y Functional Transformation Method.

Este último, el método de la Transformación del Funcional, es el método mediante el cual se realizará la síntesis de sonido digital de un instrumento de viento, método que no ha sido trabajado antes en la Universidad de los Andes ni en Colombia, sino que su investigación durante la última década se ha realizado en países como Alemania, Francia y Finlandia.

Por lo tanto, la intención de este Proyecto de Grado es realizar un trabajo investigativo acerca de este método y realizar una aplicación, en este caso, la síntesis de un instrumento de viento mediante el método de la Transformación del Funcional, aplicación que no ha sido realizada en la actualidad, puesto que el método ha sido aplicado a instrumentos de cuerda, membranas o tambores, instrumentos de cobre, y cuerpos resonantes.

2 Objetivos

2.1 OBJETIVO GENERAL.

Implementar un modelo discreto basado en la transformación del funcional de un instrumento de viento, mediante el modelado físico del mismo.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Realizar una investigación acerca de los distintos métodos de síntesis de sonido digital basados tanto en el modelado físico, como en el sonido.

Descripción física y matemática de los instrumentos de viento, los resonadores acústicos y la flauta simple.

Realizar una introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, basándose en la ecuación de onda en una dimensión, estudiando diferentes métodos de separación de variables, problemas de Sturm-Liouville y expansiones de auto funciones. Esto aplicado a un instrumento de viento.

Realizar una investigación acerca del método de la Transformación del Funcional.

Aplicación de los puntos anteriores para desarrollar la síntesis del modelo físico del instrumento de viento.

2.3 ALCANCE Y PRODUCTOS FINALES

Como se dijo anteriormente, el objetivo general de este Proyecto de Grado es realizar la síntesis de sonido digital de un instrumento de viento basándose en la Transformación del Funcional. Debido a que este método es relativamente nuevo, el éxito del proyecto radica en la implementación de este mismo, y como está planteado en los objetivos específicos, uno de los aspectos más importantes del proyecto es la Transformación del Funcional, método que no ha sido trabajado antes en la Universidad de los Andes ni en Colombia, sino que su investigación durante la última década se ha realizado en países como Alemania, Francia y Finlandia.

Por lo tanto, la intención de este Proyecto de Grado es realizar un trabajo investigativo acerca de este método y realizar una aplicación, en este caso, la síntesis de un instrumento de viento mediante el método de la Transformación del Funcional, aplicación que no ha sido realizada en la actualidad, puesto que el método ha sido aplicado a instrumentos de cuerda, membranas o tambores, instrumentos de cobre, y cuerpos resonantes.

Así, los resultados esperados son:

- Completa descripción física de un instrumento de viento.
- Correcta realización de la Transformación del Funcional al modelo físico basado en PDEs de un instrumento de viento.
- Correcta síntesis de sonido de un instrumento de viento mediante la Transformación del Funcional.

3 Metodología

Este proyecto de grado se basa en el procesamiento de señales y en el modelado físico de instrumentos musicales con objetivo la síntesis de sonido del mismo. El Proyecto consta de diferentes partes, en la parte I se da una breve descripción de los métodos de síntesis basados en sonido, incluyendo la síntesis por tabla de ondas, síntesis granular, síntesis aditiva, sustractiva, y síntesis FM.

En la parte II, se realiza la descripción física y matemática de los instrumentos musicales, en particular los instrumentos de viento, los resonadores acústicos y la flauta simple. Esto de la forma de ecuaciones diferenciales parciales con sus correspondientes condiciones iniciales y de frontera. Posteriormente, en la parte III, ya con la descripción física de los instrumentos, se da una introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, basándose en la ecuación de onda en una dimensión, estudiando diferentes métodos de separación de variables, problemas de Sturm-Liouville y expansiones de auto funciones. Esto aplicado a un instrumento de viento.

La parte IV consta de un resumen de cómo realizar la discretización de los modelos físicos de los instrumentos musicales a través de las distintas técnicas de síntesis de sonido basadas en el modelado físico.

La explicación del método de la Transformación del Funcional se lleva a cabo en la parte V, el cual es la directa aplicación de transformaciones de funcionales en tiempo y espacio con el fin de resolver los problemas de condiciones iniciales y de frontera en las ecuaciones diferenciales parciales derivadas en la parte II y III.

Después de la explicación de la Transformación del Funcional, en la parte VI, se realiza la aplicación de la misma al modelo físico de un instrumento de viento.

Un marco teórico no ha sido incluido en el proyecto, puesto que los conceptos y el estado del arte necesarios para la realización del modelo discreto de un instrumento de viento son explicados y revisados en el trabajo realizado.

4 Trabajo Realizado

Parte I – Métodos de Síntesis basados en el Sonido

En esta parte diferentes métodos de síntesis basados en sonido son brevemente analizados. Estos pueden clasificarse según la naturaleza del método, como es el caso de los métodos basados en

sonidos previamente grabados (síntesis por tabla de ondas, síntesis granular) o los llamados métodos espectrales (síntesis FM, síntesis aditiva, síntesis sustractiva). [1]

4.1.1 SÍNTESIS GRANULAR

La síntesis granular es un método de síntesis basado en sonidos previamente grabados. Consiste en la suma de distintos 'átomos de sonido' o 'granos' (de ahí el nombre característico del método), esta suma de 'granos' de sonido se genera en el dominio del tiempo resultando en la señal musical deseada. Es decir, se descompone una señal musical en pequeñas partes limitadas en tiempo y en ancho de banda, esto se puede realizar mediante diferentes métodos como realizar un muestreo a la señal original, 'ventanear' la señal. [2]

Ya obtenidas estas pequeñas porciones de la señal original, se pueden sumar de diferentes maneras por lo cual se tiene una amplia libertad con el fin de la modificación de los sonidos. Existen dos formas de realizar esta suma, la síntesis granular asíncrona y la síntesis granular síncrona.

La *síntesis granular asíncrona* es usada para producir nuevos sonidos los cuales no pueden ser producidos por instrumentos acústicos. En este tipo de síntesis los granos son sumados estadísticamente en el tiempo, esto puede verse como una convolución temporal de los granos con impulsos en el tiempo. Los granos seleccionados con distintas propiedades espectrales se eligen de manera aleatoria, esto resulta en 'nubes' en el plano tiempo-frecuencia, las cuales son altamente manipulables y es aquí donde radica la principal ventaja de este método, pues estas nubes que forman los granos sumados pueden ser modificadas dependiendo la forma de onda o duración de los granos involucrados, tiempo de inicio, amplitud, ancho de banda, distribución y área en el plano tiempo frecuencia. [2]

La *síntesis granular síncrona* a diferencia de la asíncrona, selecciona los granos después del análisis de una señal musical existente. Es decir, se descompone la señal musical en un número mínimo de granos, los cuales son excitados por una señal sincronizada con el 'pitch' de la señal musical. Este tipo de síntesis no es usada para la creación de nuevos sonidos, pues su fin es la reproducción de sonidos ya existentes, y esto lo logra mediante la imitación de la señal original, pero reduciendo la información al máximo. Se pueden realizar diferentes modificaciones como la de alterar el 'pitch' de la señal original sin cambiar su duración, o al contrario, cambiar la duración sin cambiar el 'pitch' de la señal. [2]

Para este tipo de síntesis se utiliza la STFT con ventanas Hanning o Rectangulares, y se basa en la codificación predictiva lineal.

4.1.2 SÍNTESIS POR TABLA DE ONDAS

Actualmente la síntesis por tabla de ondas es la síntesis de sonido más usada por los distintos sintetizadores del mercado. El método se basa en digitalizar señales musicales reales y guardarlas en la memoria interna del sintetizador o computador, es aquí donde radican las principales ventajas y desventajas del método. Desventajas porque se tienen que guardar todas las frecuencias y todas las formas mediante las cuales un músico puede interpretar el instrumento, esto ocupa un gran espacio de

la memoria de almacenamiento. Ventajas porque al estar en la memoria del sintetizador, el sonido puede ser reproducido fácilmente, y no se necesitan realizar muchos cálculos para obtener el sonido deseado.

Para contrarrestar el enorme espacio de memoria que ocupan estos sonidos pre-grabados, existen diferentes algoritmos (Looping, Enveloping, Pitch Shifting, Enveloping, Filtering) los cuales reducen la cantidad de memoria requerida y también ayudan a modificar o manipular los sonidos ya existentes, por lo tanto este tipo de síntesis es usada para reproducir nuevos sonidos o sonidos ya existentes.

4.1.3 SÍNTESIS ADITIVA

La síntesis aditiva se puede ver como un tipo de síntesis granular, sólo que todos los granos corresponden a señales sinusoidales con diferentes amplitudes, frecuencias, y fases. Así estos diferentes granos son sumados hasta obtener la señal musical deseada. Este tipo de síntesis se basa en las series de Fourier.

Esta suma de sinusoides se describe mediante la siguiente ecuación:

$$f(t) = n(t) + \sum_{n=1}^N B_n(t)(\sin(\omega_n(t)t + \varphi_n(t)) \quad (1.1)$$

Donde $n(t)$ es una fuente de algún tipo de ruido (blanco, azul, etc.), $B(t)$ son las amplitudes, $\omega(t)$ las frecuencias, $\varphi(t)$ las fases.

Para estimar los parámetros de 1.1 se utiliza un algoritmo de selección de picos (peak-picking) de la STFT de la señal original, a estos algoritmos se les reconoce como algoritmos de nacimiento y muerte, pues en ellos se decide que sinusoides se agregan o desaparecen en determinados tiempos. Las modificaciones a la señal obtenida se pueden realizar modificando los distintos parámetros de las sinusoides en el plano tiempo-frecuencia. [3]

La principal desventaja de este método, es que es muy caro computacionalmente debido a la cantidad de parámetros que tienen que ser calculados mediante los algoritmos de selección de picos.

4.1.4 SÍNTESIS SUSTRACTIVA

La síntesis sustractiva puede verse como todo lo contrario a la síntesis aditiva, pues en vez de basarse en la suma de señales, mediante el filtraje de la señal se obtiene la señal deseada. Estos filtros pueden ser estáticos o pueden variar con el tiempo, depende de la naturaleza del mismo, pues si se está sintetizando un cuerpo resonante, este no va a cambiar en el tiempo, por lo tanto le corresponde un filtro estático.

Posee la ventaja de no depender de la señal de entrada, pues no tiene que dividir esta en pequeñas partes temporales o espectrales y no se limita a señales semi-periódicas o con 'pitch', por lo tanto se puede aplicar a señales de percusión. Al poder cambiar los parámetros de los filtros, se pueden modificar las señales fácilmente y en la creación de nuevos sonidos existe una gran libertad.

4.1.5 SÍNTESIS FM

La síntesis FM, síntesis por modulación frecuencial, se basa en la obtención de una señal modulada. Esto se realiza con dos señales, señal portadora y señal moduladora, y en este caso se varía la frecuencia de la señal portadora con la señal moduladora resultando en una señal más compleja y de diferente forma de onda. La síntesis FM se caracteriza por su no linealidad debida a la distorsión de la frecuencia de la señal portadora.

La síntesis FM sigue el siguiente algoritmo:

$$f(t) = B(t)(\sin(\omega_c t + \varphi(t))) \quad (1.2)$$

Donde $f(t)$ es la señal portadora y ω_c su frecuencia, y $\varphi(t)$ es la señal moduladora que está cambiando constantemente, y puede ser de muchas formas de onda dependiendo del tipo de modulación requerida. [3]

La síntesis FM puede ser utilizada para la simulación de sonidos ya existentes o para la creación de nuevos sonidos, todo depende del número y tipo de osciladores utilizados en el momento de realizar la síntesis.

Parte II – Descripción Física de los Instrumentos de Viento.

En esta parte se analiza la descripción física de los instrumentos musicales, su notación general usada en la descripción vibratoria de los mismos. Posteriormente se describirán los resonadores acústicos, el movimiento armónico simple de ondas longitudinales viajando en el aire, la reflexión de las mismas en tubos resonantes abiertos o cerrados al inicio o fin y la presión longitudinal de las ondas en tubos. Y finalmente se analizarán los cambios debidos a los hoyos presentes en diferentes instrumentos de viento como las flautas de concierto.

4.2.1 DESCRIPCIÓN FÍSICA DE INSTRUMENTOS MUSICALES [1]

Los modelos físicos de los instrumentos musicales consisten en ecuaciones diferenciales parciales (PDEs por sus siglas en inglés), las cuales contienen derivadas espaciales y temporales. Además las condiciones iniciales temporales indican los estados iniciales de la estructura vibratoria, y las condiciones de frontera definen la forma en la que se interactúa con la frontera. La combinación de PDE y de condiciones iniciales y de frontera se denomina como un problema de valores iniciales y de frontera.

Estas PDEs se pueden representar de forma escalar o vectorial, y son obtenidas después de una análisis físico de la estructura del instrumento musical.

Debido a que los instrumentos de viento pueden ser modelados como instrumentos de una dimensión, como las cuerdas de ciertos instrumentos (guitarra, bajo, piano, etc.), por lo tanto en las siguientes ecuaciones en vez de emplear una notación vectorial para la variable espacial $\mathbf{x}$, la cual puede ser de 3 dimensiones, se utilizara simplemente x , esto debido a una facilidad en la notación y a que son los instrumentos de una dimensión los que nos interesan.

La notación general escalar para las PDEs es la siguiente:

$$D\{y(x, t)\} + L\{y(x, t)\} + W\{y(x, t)\} = f_e(x, t), \quad x \in V, t \in [0, \infty), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{f}_i^T\{y(x, t)\} = \mathbf{f}_i^T \mathbf{y}(x, t) = \mathbf{y}_i(x), \quad x \in V, t = 0, \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{f}_b^T\{y(x, t)\} = \mathbf{f}_b^T \mathbf{y}(x, t) = \phi_B(x, t), \quad x \in B, t \in [0, \infty), \quad (2.1c)$$

El operador $D\{\}$ contiene las derivadas temporales, $L\{\}$ incluye las derivadas espaciales, $W\{\}$ consiste en las derivadas mixtas, temporales y espaciales. La función de excitación de está dada por $f_e(x, t)$. Las condiciones iniciales son descritas en la ecuación 2.1b por el operador $\mathbf{f}_i^T\{\}$, dando como función de condiciones iniciales a $\mathbf{y}_i(x)$. De igual manera las condiciones de frontera están dadas por el operador $\mathbf{f}_b^T\{\}$ en la ecuación 2.1c, dando como función de condiciones de frontera a $\phi_B(x, t)$. El superíndice T denota transposición.

Las ecuación 2.1a sólo es válida entre el rango espacial definido V, en el caso de los instrumentos de viento V es un línea (1-D), y este está limitado por la frontera B.

De igual forma la notación general vectorial para las PDEs es la siguiente:

$$\mathbf{A}\mathbf{y}(x, t) + \mathbf{B}(\nabla\mathbf{y}(x, t)) + \mathbf{C}D_t\mathbf{y}(x, t) = \mathbf{v}(x, t), \quad x \in V, t \in [0, \infty), \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{f}_i^T \mathbf{y}(x, t) = \mathbf{y}_i(x), \quad x \in V, t = 0, \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{f}_b^T \mathbf{y}(x, t) = \phi_B(x, t), \quad x \in B, t \in [0, \infty), \quad (2.2c)$$

Donde el operador D_t denota las derivadas temporales de primer orden, ∇ denota las derivadas espaciales de primer orden, como sólo nos interesan instrumentos en una dimensión ∇ queda reducido a la derivada espacial de primer orden. La matriz $\mathbf{A}$ contiene los términos de pérdidas, $\mathbf{B}$ combina todas las expresiones con derivadas espaciales de primer orden, $\mathbf{C}$ es una matriz de capacitancia o masa, y $\mathbf{v}(x, t)$ es un vector de excitación el cual contiene todas las funciones externas de excitación.

Todas las PDEs escalares basadas en modelos físicos de vibraciones longitudinales, torsionales o transversales, pueden ser descritas mediante la siguiente notación general:

$$D\{y(x, t)\} = a_1\dot{y}(x, t) + a_2\ddot{y}(x, t), \quad (2.3a)$$

$$L\{y(x, t)\} = b_2y''(x, t) + b_4y''''(x, t), \quad (2.3b)$$

$$W\{y(x, t)\} = c_3\dot{y}''(x, t), \quad (2.3c)$$

Donde $\dot{y}(x, t)$ corresponde a la primera derivada temporal, y $y'(x, t)$ es la primera derivada espacial.

Las ecuaciones 2.3 surgen de insertar la ecuación 2.2a entre ellas mismas, con el fin de eliminar todas las variables de salida, excepto una. Los modelos que pueden ser representados mediante las ecuaciones 2.1 y 2.2 corresponden a sistemas lineales y no lineales. Además se asumen invariantes en

el tiempo y el espacio, por lo tanto un corrimiento en el tiempo o espacio no afectaría el comportamiento vibratorio del instrumento musical.

4.2.2 RESONADORES ACÚSTICOS [4], [5]

Los resonadores acústicos se pueden dividir en dos categorías, los más comunes consisten en tubos cilíndricos de dimensión finita, hechos de metal, plástico, bambú, etc. Los cuales pueden estar abiertos al inicio y fin del tubo, o estar cerrados en el fin del tubo. La otra clase de resonadores acústicos consisten en aquellos se basan no en un tubo sino en un tipo de cavidad ya sea regular o irregular. El primer tipo de resonantes acústicos serán el objeto principal de estudio en esta sección, esto debido a que las matemáticas involucradas en este clase son más sencillas, y no presentan muchas dificultades.

Además, debido a que el principal sistema de producción de sonido de un instrumento estándar de viento, como la flauta, consiste en la vibración de una columna de aire en medio de un tubo angosto, La comprensión de un resonador acústico de este tipo, es vital antes de estudiar estos tipos de instrumentos.

4.2.3 LA FLAUTA SIMPLE [4], [5]

La Flauta es uno de los instrumentos más antiguos, y su funcionamiento es bastante único, pues sus dimensiones físicas son las que determinan las escalas y afinamiento del instrumento. Las matemáticas del tubo de la flauta, del hoyo de embocadura, y de los hoyos de tono no cubren todos los aspectos del funcionamiento del instrumento, esto se debe a que la entonación de la flauta depende del chorro de aire y de la fuerza del mismo, también depende de la porción del hoyo de embocadura que cubren los labios del interprete.

Se estudiará el caso de los resonadores acústicos abiertos en ambos lados, esto debido a que los distintos tipos de flauta poseen esta característica.

Primero, hay que distinguir entre la longitud efectiva o acústica del instrumento, y la longitud geométrica o medida del mismo. Dado que el tubo se encuentra abierto en ambos lados, la reflexión de las ondas de presión ocurre después de la longitud geométrica, por lo tanto la longitud efectiva es mayor que la longitud geométrica. Esto se puede apreciar en la siguiente figura.

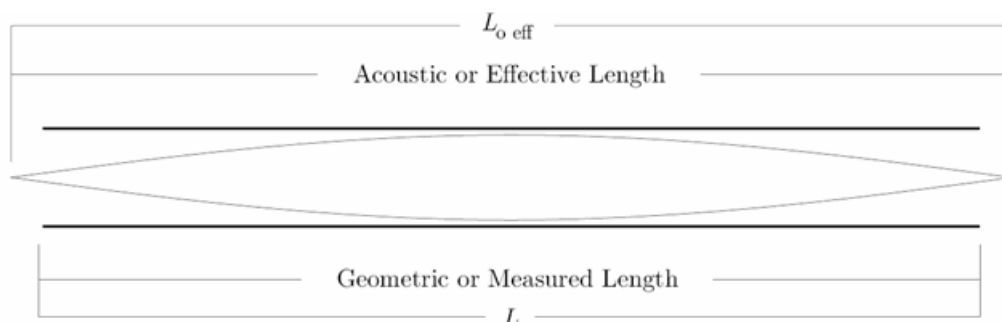


Figura 2.1 Longitud efectiva, y longitud geométrica de un tubo abierto en ambos lados. [4]

Para el estudio de las longitudes involucradas en una flauta, se usaran tubos cerrados en ambos lados, estos tubos no tienen ningún tipo de uso musical, pero se emplearan para representar la longitud efectiva de un tubo abierto en ambos lados, esto es debido a que la longitud geométrica y efectiva en un tubo cerrado-cerrado es la misma, por lo tanto para modelar la longitud efectiva de un tubo de longitud L , se utilizará un tubo cerrado-cerrado de longitud L_{eff} .

Así, la longitud de onda fundamental λ_1 está dada por $\lambda_1 = 2 L_{eff}$, y por lo tanto, la frecuencia fundamental es:

$$F_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L_{eff}} = \frac{c}{2L_s} \quad (2.4)$$

Donde c es la velocidad del sonido dentro de la flauta, y L_s es la longitud del tubo cerrado-cerrado que representa la longitud efectiva de la flauta.

Ahora bien, una flauta transversa consiste en un tubo abierto en ambos lados, el hoyo de la embocadura representa la primera abertura, y el hoyo al final de la flauta representa la segunda abertura. Esta segunda abertura cambia cuando alguno de los hoyos de tono está abierto, convirtiéndose este hoyo en el hoyo del final y por lo tanto reduciendo la longitud efectiva de la flauta.

Esto se puede observar mejor en la figura 2.2, donde se muestra la longitud efectiva de una flauta con todos los hoyos cerrados, esta longitud efectiva es representada como un tubo cerrado-cerrado de longitud L_s . Así mismo se realiza lo mismo para una flauta con el primer hoyo de tono abierto.

Para poder determinar la longitud efectiva de una flauta dependiendo de la configuración de los hoyos de tono tenemos las siguientes ecuaciones.

$$L_s = \Delta l_e + l_t + \Delta l_t \quad (2.5a)$$

$$L_s = \Delta l_e + l_l + \Delta l_h \quad (2.5b)$$

Donde Δl_e es la corrección en el hoyo de la embocadura, l_t es la longitud geométrica de la flauta desde el centro del hoyo de embocadura, hasta el hoyo al final de la flauta, Δl_t es la corrección en el hoyo al final de la flauta.

De igual manera en la ecuación 2.4b, l_l es la longitud geométrica de la flauta desde el centro del hoyo de embocadura, hasta el centro del primer hoyo de tono abierto, y Δl_h es la corrección en el primer hoyo de tono abierto.

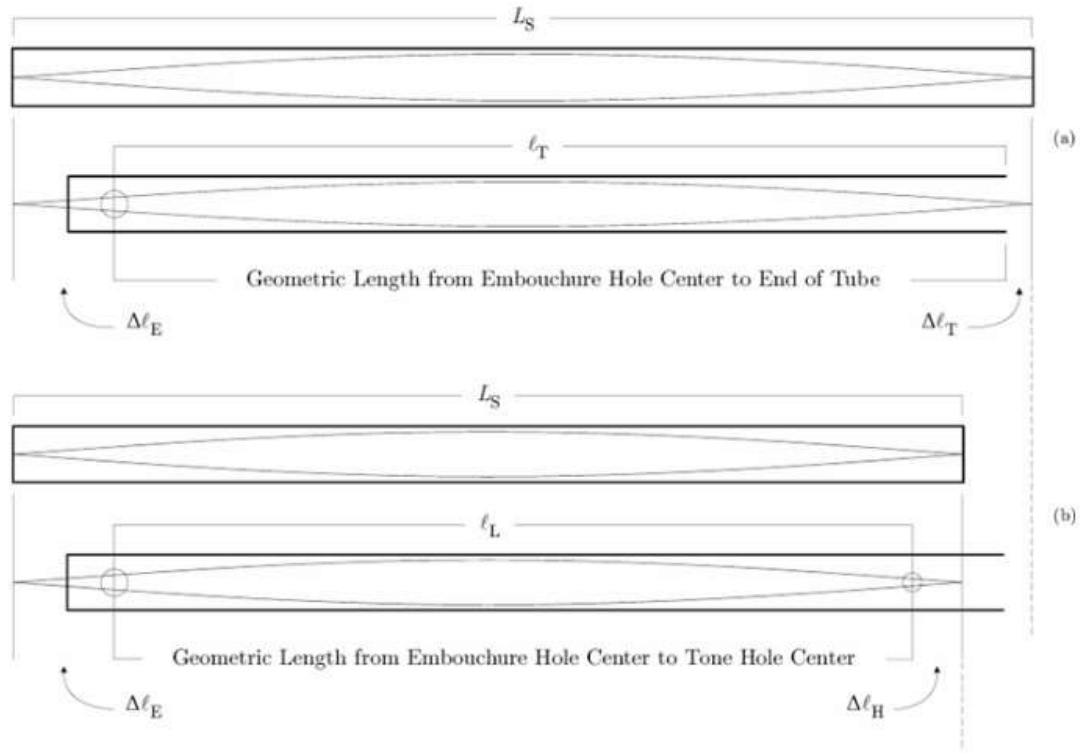


Figura 2.2 a) L_s representa la longitud efectiva de una flauta con todos los hoyos de tono cerrados. b) L_s representa la longitud efectiva de una flauta con el primero de los hoyos de tono abierto. [4]

Para poder obtener la longitud efectiva de la flauta se tienen que calcular las distintas correcciones en los hoyos, puesto que l_t y l_L ya se conocen, pues son las medidas geométricas de la flauta. Las demás correcciones están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\Delta l_e \cong (l_e + d_E) \left(\frac{d_0}{d_E} \right)^2 - 0.45d_0 \quad (2.6)$$

$$\Delta l_h = (l_h + d_h) \left(\frac{d_1}{d_h} \right)^2 - 0.45d_1 \quad (2.7)$$

$$\Delta l_t = 0.3d_1 \quad (2.8)$$

Δl_e es aproximado, puesto que depende de la intensidad del chorro de aire de la señal de entrada y de la porción de los labios que cubren la embocadura, por lo tanto estos parámetros no se pueden predecir, sin embargo, la aproximación es bastante correcta.

l_e y l_h es la medida geométrica de los hoyos de embocadura y de tono respectivamente, se puede ver como la altura de los mismos, y siempre corresponde a unos pocos milímetros. d_0 es el diámetro del tubo de la flauta en donde se encuentra el hoyo de embocadura, d_1 es el diámetro del tubo de la flauta en donde se encuentran los hoyos de tono, d_E y d_h es el diámetro del hoyo de embocadura y de tono respectivamente.

Como se puede ver, en las ecuaciones 2.5 – 2.7 sólo se necesitan las diferentes medidas geométricas de la flauta para poder hallar las correcciones en los hoyos y así la longitud efectiva de la flauta.

Una vez se tiene la longitud efectiva de la flauta, se procede al cálculo de la impedancia acústica de la flauta. Como la flauta es un tubo cilíndrico finito de longitud L_s cuando $x = L_s$ el tubo es terminado mediante una impedancia Z_L . Esta impedancia es la que nos brinda las condiciones de frontera en la solución de las PDEs, y está dada por la siguiente ecuación:

$$Z_L = \frac{j\rho\omega L_s}{S} \quad (2.9)$$

Donde ρ es la densidad del aire en kilogramos por milímetro cúbico, ω es la frecuencia angular en radianes por segundo, S es el área superficial del tubo en milímetros cuadrados.

Parte III – Ecuaciones Diferenciales Parciales en un Instrumento de Viento

En la sección anterior se dio una breve descripción física de los instrumentos musicales y como estos se basan en PDEs, en esta parte se analizan las ecuaciones diferenciales parciales, basándose en la ecuación de onda en una dimensión, estudiando diferentes métodos de separación de variables, problemas de Sturm-Liouville y expansiones de auto funciones. Esto aplicado a un instrumento de viento.

4.3.1 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN UN INSTRUMENTO DE VIENTO [6]

Como se dijo en la sección anterior, en un instrumento de viento como la flauta el sonido es generado directamente, pues se crea mediante el chorro de aire introducido por el intérprete, y el instrumento por su geometría, se puede considerar como un instrumento largo y angosto con un área superficial uniforme, y por lo tanto, se puede utilizar la ecuación de onda en una dimensión para modelar el comportamiento de la presión y de la velocidad de las partículas dentro de la flauta.

$$y''(x, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{y}(x, t), \quad x \in V, t \in [0, \infty) \quad (3.1)$$

Donde c es la velocidad del sonido dentro de la flauta, y V es el intervalo espacial entre $[0, L_s]$, siendo L_s la longitud efectiva de la flauta dependiendo de la configuración de hoyos de tonos abiertos o cerrados.

La ecuación de onda en una dimensión (3.1) se deriva de las siguientes ecuaciones.

$$\frac{S}{\rho c^2} \dot{p}(x, t) = -u'(x, t), \quad x \in V, t \in [0, \infty) \quad (3.2a)$$

$$\frac{\rho}{S} \dot{u}(x, t) = -p'(x, t), \quad x \in V, t \in [0, \infty) \quad (3.2b)$$

Donde $u(x, t)$ y $p(x, t)$ son el volumen de la velocidad y la presión dentro de la flauta respectivamente, S es el área superficial de la flauta y ρ es la densidad del aire dentro de la flauta. [7]

Por lo tanto se puede considerar de la ecuación 3.1 y 3.2 que $p(x, t)$ en el caso de ondas en un tubo angosto (1 dimensión) sólo depende de una coordenada espacial x y del tiempo t

$$y(x, t) = p(x, t) \quad (3.3)$$

Para la flauta, como condición de frontera, se utilizan las condiciones de frontera de primer tipo, más conocidas como las condiciones de frontera de Dirichlet, donde $p(x, t)$ se anula en las fronteras.

4.3.2 FRECUENCIAS BÁSICAS DE LA FLAUTA [6]

Ahora bien, ya obtenidas las PDEs de un instrumento de viento como la flauta, y sus correspondientes condiciones de frontera, abordar el problema de Sturm-Liouville, encontrar sus valores propios y encontrar las frecuencias básicas de la flauta, las cuales son los mismos valores propios es algo esencial para el objetivo buscado en este Proyecto de Grado, pues como veremos más adelante, la Transformación del Funcional se basa en la transformada de Sturm-Liouville.

Esto se realiza resolviendo el siguiente sistema, donde la función K es una posible solución a un problema de valor de frontera.

$$K''(x) = -\lambda K(x), \quad x \in V, \quad (3.4a)$$

$$K(0) = K(L) = 0, \quad (3.4b)$$

El problema de las ecuaciones 3.4, se denomina un problema de valor propio, y la solución del sistema es la auto función $K(x)$ con los valores propios λ . Como en la flauta se aplican las condiciones de frontera de Dirichlet, en $x = 0 = L$ (Longitud efectiva de la flauta), la auto función también debe anularse.

Este problema de Sturm-Liouville posee una forma general de llevarse a cabo, pues se trata de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, su solución depende de λ y es de la siguiente forma.

$$1. \quad \lambda < 0 \rightarrow K(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad (3.5a)$$

$$2. \quad \lambda = 0 \rightarrow K(x) = \alpha + \beta x, \quad (3.5b)$$

$$3. \quad \lambda > 0 \rightarrow K(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad (3.5c)$$

Donde se asume que λ es un número real, y para el problema en cuestión, con condiciones de frontera de Dirichlet la solución corresponde a la ecuación 3.5c, es decir $\lambda > 0$.

Al insertar la ecuación 3.5c en 3.4b, se obtiene que $\alpha = 0$, pues $K(0) = 0$, por la naturaleza de las funciones coseno y seno. De $K(L) = 0$ se obtiene que $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, donde n es un número entero positivo.

Por lo tanto la solución a este sistema es una secuencia infinita de auto funciones, cada una asociada con un valor propio positivo. Estos son de la siguiente forma.

$$K_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

Como se puede ver en 3.6 K_n y λ_n están indexados por un número entero positivo n , este número puede ser 1, 2 o 3, dependiendo del tamaño del vector $\mathbf{x}$, como en este caso el problema corresponde a una dimensión se tiene que el tamaño del vector es 1.

Ya con las auto funciones y valores propios correspondientes a las PDEs de una flauta (ecuación de onda en una dimensión), sabiendo las impedancias de terminación de la flauta y las condiciones de frontera, se puede abordar la Transformación del Funcional.

Parte IV – Métodos de Síntesis de Sonido Basados en el Modelado Físico

Como se realizó en la sección I, en esta parte diferentes métodos de síntesis de sonido basados en el modelo físico de los instrumentos son brevemente analizados. Desde el punto de vista del procesamiento de señales, estos métodos pueden ser vistos como una extensión de los métodos basados en sonido en la que se incluye la variable espacial.

Estos métodos de modelado físico, tienen como objetivo simular las vibraciones que ocurren en los instrumentos musicales de la manera más precisa posible y con el menor gasto computacional. Puesto que como se vio anteriormente los modelos físicos de instrumentos se basan en ecuaciones parciales diferenciables, estas ecuaciones poseen derivadas continuas en tiempo y espacio, por lo tanto no pueden ser resueltas directamente en el computador.

En los siguientes métodos, estos modelos físicos son discretizados de una forma u otra. Los cuales se pueden clasificar en dos categorías; síntesis de sonido orientada en el dominio del tiempo, y síntesis de sonido orientada en el dominio de la frecuencia. La primera categoría incluye el método de las diferencias finitas, y el método de las guías de ondas digitales. En la segunda categoría se encuentra el método de la síntesis modal. [1]

4.4.1 MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS [1]

Este método corresponde a la realización de la síntesis de sonido orientada en el dominio del tiempo. Se basa en la directa discretización de las derivadas temporales y espaciales presentes en los modelos físicos de los instrumentos musicales, esto conduce a ecuaciones de diferencia, las cuales pueden ser

explícitas o implícitas e implementadas y resueltas en un computador. Cuando las ecuaciones de diferencia resultantes son explícitas quiere decir que estas pueden ser resueltas basadas en los estados previos, a diferencia de las ecuaciones de diferencia implícitas, las cuales no pueden ser resueltas de esta manera sino que necesitan otros tipos de algoritmos y desarrollos.

La discretización de los modelos físicos se lleva de la siguiente manera, por cada derivada parcial presente en el modelo, se desarrolla su expansión en series de Taylor, así las derivadas son reemplazadas por diferencias discretas y otros términos de mayor grado los cuales al final resultan despreciados.

$$\dot{y}(x, t)|_{ts} = \frac{y(x, ts) - y(x, ts - T)}{T} + \frac{T}{2} \ddot{y}(x, t)|_{ts} + \dots \quad (4.1)$$

La ecuación 4.1 es un ejemplo de cómo convertir una derivada parcial en un ecuación de diferencias, este método es llamado aproximación de diferencias reversas, puesto que depende del estado anterior. T es el intervalo temporal de muestreo.

Los principales inconvenientes de este método es su ineficiencia computacional y sus problemas de estabilidad, por estas razones el método no puede realizarse en tiempo real y es considerado un método 'offline'.

4.4.2 MÉTODO DE GUÍAS DE ONDAS DIGITALES [1]

Este método, junto al método de las diferencias finitas, hace parte de los tipos de síntesis de sonido basados en el modelado físico orientados en el dominio del tiempo. El modelo básico de este método fue desarrollado para resolver modelos físicos basados en una dimensión como cuerdas o tubos, es extremadamente eficiente computacionalmente, y es por esta razón que durante mucho tiempo fue el único método de síntesis de sonido basado en los modelos físicos en ser implementado en tiempo real en distintos computadores o sintetizadores.

El modelo básico del método de guías de ondas digitales se basa en la descomposición del instrumento en distintas partes, por ejemplo, en [1], es realizada la descomposición de una cuerda de guitarra acústica, la cual consta de tres partes:

- Tablas de ondas, modelando la señal de excitación del instrumento.
- Modelo de la cuerda, basado en guías de ondas digitales.
- Filtro correspondiente al cuerpo resonante del instrumento.

El método de guías de ondas digitales está basado en la solución analítica de la ecuación de onda en una dimensión, la cual consta de dos ondas viajeras, cada una viajando en sentido contrario. Esta solución puede ser implementada eficientemente mediante líneas digitales de retraso. Además de estas líneas de retraso, ciertas características del instrumento pueden ser implementadas mediante distintos filtros digitales, como es el caso de un filtro de pérdidas el cual simula las terminaciones de la

cuerda, pérdidas independientes y dependientes de la frecuencia, etc. Un filtro 'all-pass' el cual simula los efectos de dispersión. Y finalmente, para poder ajustarse a la afinación correcta, un filtro de retrasos fraccionarios es necesario.

Lo anterior se puede ver descrito en la siguiente figura.

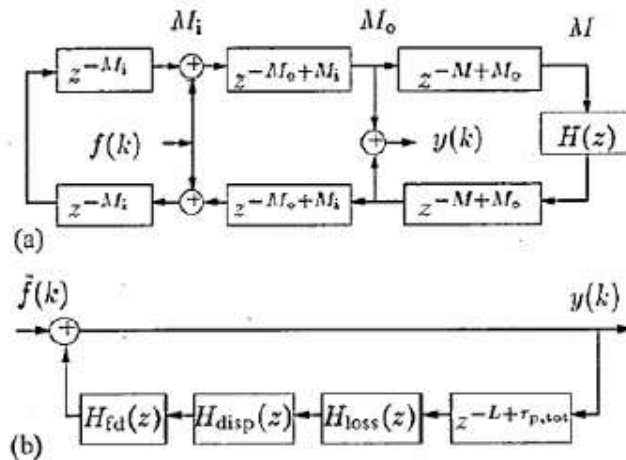


Figura 4.1 Modelo básico del método de guías de ondas digitales. a) Dos líneas de retardo simulando las dos ondas viajeras. b) Línea de retardo del doble de longitud de cada línea presente en a). [1]

Se puede observar en 4.1a las dos ondas viajando en sentido contrario, $H(z)$ corresponde a los tres filtros descritos anteriormente, $f(k)$ es la señal de excitación y $y(k)$ corresponde a la salida del sistema. Igualmente en 4.1b se realiza lo mismo, sólo que de una forma más eficiente, pues solo se tiene una línea de retardo del doble de longitud, los filtros entrada y salida, son los mismos que en 4.1a.

Como ya se dijo, la principal ventaja del método es su efectividad computacional, pero también posee sus desventajas, y esta recae en la similitud al sonido real del instrumento, la cual disminuye debido a los filtros diseñados en el método, pues los coeficientes de estos son calculados a través de sonidos pregrabados, por lo tanto no son determinados sobre las propiedades físicas del instrumento.

4.4.3 MÉTODO DE LA SÍNTESIS MODAL [1]

En contraste a los dos métodos descritos anteriormente, la síntesis modal está orientada en el dominio frecuencial. Tiene cierta similitud con la síntesis aditiva, sólo que las frecuencias de las señales que se van a sumar no son seleccionadas arbitrariamente sino que son determinadas basándose en la estructura física del instrumento.

La síntesis modal describe a los instrumentos en subdivisiones de distintas estructuras, donde cada estructura es descrita por su información modal. Esta información modal corresponde a las frecuencias temporales, coeficientes de amortiguación, y distribución de los modos en la estructura. Así la señal resultante es obtenida sumando las distintas contribuciones de cada modo.

El costo computacional del método es bastante alto, sin embargo, es bastante efectivo en lo que refiere a realismo del sonido, además se puede aplicar a estructuras complejas. Otro inconveniente es que los modos de cada estructura solo pueden ser hallados mediante distintos experimentos.

Parte V – El Método de la Transformación del Funcional.

En esta sección se introduce un nuevo método de síntesis de sonido digital basado en el modelado físico, el cual se denomina el método de la Transformación del Funcional. Como primer aspecto, este método se diferencia de los tres métodos explicados en la sección anterior en que no aproxima el sonido resultante discretizando diferentes características del instrumento real, sino que directamente resuelve la PDE, es decir, soluciona directamente el modelo físico del instrumento musical.

La Transformación del Funcional resuelve analíticamente el problema de valores iniciales y de frontera correspondientes a las PDEs del modelo físico de los instrumentos musicales. Esto brinda la gran ventaja de tener una solución que comprende todas las características geométricas y parámetros físicos del instrumento. El método junto con la síntesis modal, está orientado hacia el dominio de la frecuencia, pero dado que resuelve el modelo físico de forma analítica, el sonido sintetizado es mucho más preciso que cualquier otro método de síntesis. Además es bastante eficiente, pues permite simulaciones en tiempo real, por lo tanto se puede denominar como un método de síntesis ‘online’. [1]

4.5.1 PRINCIPIOS DEL MÉTODO DE LA TRANSFORMACIÓN DEL FUNCIONAL [1]

El objetivo principal de la Transformación del Funcional consiste en resolver analíticamente el problema de valores iniciales y de frontera, El cual se encuentra en el modelo físico de un instrumento musical de la forma de PDE con condiciones iniciales y de frontera. Se llega a esta solución analítica mediante la realización de Transformaciones de Funcionales.

Pensemos primero en un sistema representado por una ecuación diferencial ordinaria (ODE), la cual solo tiene derivadas en el tiempo, si queremos llegar a la función de transferencia que describe el sistema una de las formas de realizarlo es aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial y a sus condiciones iniciales. Al realizar esto, estamos convirtiendo las derivadas de tiempo en multiplicaciones algebraicas con la variable compleja de frecuencia de Laplace (s). Además las condiciones iniciales se están reemplazando por sumas algebraicas de los términos respectivos a los valores iniciales.

Así mediante esta transformación se está convirtiendo un problema de valor inicial de la forma de una ecuación diferencial ordinaria, en una ecuación algebraica. Ya con esta ecuación algebraica, se puede reorganizar y obtener la función de transferencia que representa el sistema inicial. Esto se pudo realizar gracias a las propiedades de la Transformada de Laplace.

Estas propiedades radican en que el ‘kernel’ de la Transformada de Laplace (e^{-st}) es una auto-función para todos los sistemas LTI, y en que el rango de integración de la transformación $(0, \infty)$ es el mismo al rango definido para problemas de valor inicial. Por lo tanto estas propiedades obtenidas con la

Transformada de Laplace se pueden obtener aplicándola a cualquier problema de valor inicial LTI independiente del orden de la ecuación diferencial o de los valores de sus coeficientes.

Ya con la función de transferencia obtenida, esta se puede discretizar mediante diferentes métodos (Impulso invariante, escalón invariante, transformación bilineal, etc.), y una vez discretizado, este se puede implementar fácilmente en un computador, y así obtener resultados precisos hasta la frecuencia de Nyquist.

Ahora bien, en lo que respecta a los modelos físicos de los instrumentos musicales, cuya descripción se basa en PDEs, el objetivo es llegar a una Función de Transferencia Multi-Dimensional (MD TFM) que represente el sistema (el instrumento musical), realizar la respectiva discretización, implementar la MD TFM en el computador y llegar a una simulación precisa del sistema.

Si se tiene una PDEs que represente las vibraciones en un instrumento musical, y se le aplica la Transformada de Laplace, esta debido a las propiedades de la transformada, va a convertir todas las derivadas temporales en multiplicaciones con la variable frecuencial de Laplace, y a incluir los valores iniciales. Así, la PDE original queda convertida en una ODE sin derivadas temporales y el problema pasa de ser de valores iniciales y de frontera, a solo de valores de frontera para una coordinada espacial.

¿Qué tendríamos que hacer para poder llegar a una Función de Transferencia Multi-Dimensional?, Estoy se lograría reemplazando las derivadas espaciales por multiplicaciones con una variable frecuencial espacial, e incluyendo los valores de las condiciones de frontera como sumas algebraicas.

Para poder lograr esto, es necesario un tipo de transformada que tenga las mismas propiedades que la transformada de Laplace, pero para la variable espacial.

Desafortunadamente, no existe una transformada única o genérica que pueda servir para cualquier tipo de sistema y contenga estas propiedades, esto se debe a los distintas condiciones de frontera que pueden ocurrir en cualquier tipo de sistema, ya que éstas siempre están limitadas a un rango específico, mientras que por ejemplo en el dominio temporal, este rango suele ser de $(0, \infty)$. Por lo tanto, se debe buscar un tipo de transformada, o más bien un tipo de 'kernel' y variable espacial temporal para cada problema que se está solucionando.

Este problema al que nos estamos enfrentando, se denomina como un problema de Sturm-Liouville, cuya teoría radica en que existen sistemas de funciones ortogonales, cada una adecuada para cada tipo de condiciones de frontera. Así este tipo de problema está basado en términos de operadores diferenciales espaciales, tipo de dominio espacial, y tipo de condiciones de frontera. Por lo tanto este tipo de transformación espacial son integrales finitas, cuyo rango es el mismo que el rango espacial del sistema, y cuyo funcional puede ser un seno, coseno, una función de Bessel, de Hankel, etc. Y se denomina Transformada de Sturm-Liouville.

Una vez aplicadas las dos Transformaciones Funcionales, se obtiene una ecuación algebraica, sin derivadas, e incluyendo los valores iniciales y de frontera, esta se puede reorganizar, y así obtener una MD TFM la cual se puede discretizar, implementar en un computador, y después de realizar las transformaciones inversas obtener una solución discreta con resultados de simulación bastante precisos.

4.5.2 TRANSFORMACIÓN DEL FUNCIONAL APLICADO A PDEs ESCALARES [1]

El procedimiento general para resolver problemas de valores iniciales y de frontera, de la forma de PDEs es el siguiente:

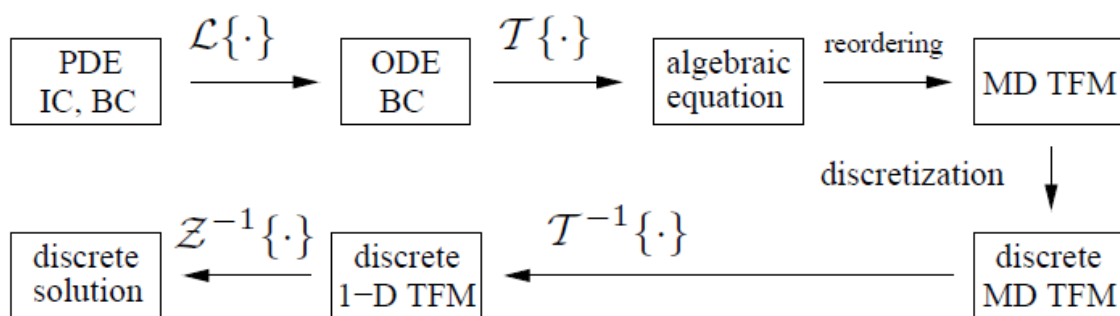


Figura 5.1 Procedimiento general de la Transformación del Funcional. [1]

Como se puede observar en la figura 5.1, el procedimiento consta de 6 pasos, los cuales se pueden resumir de la siguiente manera.

1. Aplicar la transformada de Laplace con respecto al tiempo a la PDEs que representa el modelo físico junto con sus condiciones iniciales (IC) y condiciones de frontera (BC). Así se reemplazarán las derivadas temporales presentes en $D\{\}$ y $W\{\}$ (ecuación 2.1), y la ecuación resultante será una ODE con sus respectivas condiciones de frontera.
2. Realizar la adecuada Transformada de Sturm-Liouville a la ODE resultante, con el fin de reemplazar las derivadas espaciales en $L\{\}$ y $W\{\}$ y de incluir las condiciones de frontera como sumas algebraicas.
3. Una vez realizadas las dos Transformadas Funcionales, el resultado es una ecuación algebraica, esta se puede reordenar de la forma de una Función de Transferencia Multi-Dimensional, la cual representa el sistema a resolver.
4. Realizar la debida discretización a la MD TFM, tanto en tiempo como en espacio, la discretización en el tiempo puede realizarse con diversos métodos (impulso-invariante, transformada bilineal, etc.) para así obtener una representación del sistema en el dominio-z. La

discretización espacial se realiza simplemente escogiendo un número finito de puntos espaciales entre el rango definido para el instrumento.

5. Ya obtenida la MD TFM discreta se procede a realizar la Transformada Inversa de Sturm-Liouville, en los puntos espaciales escogidos en la discretización espacial.
6. Aplicación de la Transformada Inversa Z usando el teorema de corrimiento, para así llegar a una solución efectiva basándose en sistemas recursivos discretos.

Parte VI – Aplicación de la Transformación del Funcional a un Instrumento de Viento.

En esta sección se estudiará más a fondo el método de la Transformación del Funcional, pues se realizará la respectiva aplicación del mismo a un instrumento de viento, utilizando la descripción física y las ecuaciones diferenciales parciales del mismo (parte II y parte III). El instrumento de viento a tratar será una flauta simple.

Ahora bien, como se derivó en la sección 3, la PDE correspondiente a un instrumento de viento corresponde a la ecuación 3.1, puesto que se considera el instrumento como un tubo largo y angosto, y debido a esta geometría y las ecuaciones 3.1 – 3.3 se puede escribir la siguiente ecuación de onda para la presión:

$$p''(x, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{p}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t \in [0, \infty) \quad (6.1)$$

Donde l es la longitud efectiva del instrumento, x la variable espacial, t el tiempo, c la velocidad del sonido dentro de la flauta.

En una flauta simple, la cual está abierta en ambos lados, es decir, en la embocadura y alguno de los hoyos de tono o el hoyo del final de la flauta, se usan las condiciones de frontera de Dirichlet como se dijo en la parte III, donde la presión o cualquier combinación lineal de sus derivadas temporales es 0 cuando $x = 0, l$. Como la mayor derivada espacial es de orden 2, se necesita una condición de frontera en cada extremo de la flauta.

Sin embargo, en la embocadura de la flauta ($x = 0$), cuando la flauta es accionada por el instrumentista, esta entra en contacto con una columna de aire, y por ende la presión es igual a una función de excitación de frontera $\phi(t)$.

Las condiciones iniciales en tiempo y las fuerzas de excitación en V ($0 < x < l$) se establecen como homogéneas, puesto que se desea que el único mecanismo de excitación sea mediante una fuerza de excitación de frontera, como sucede en un instrumento de viento real.

Así el problema de condiciones iniciales y de frontera a resolver es el siguiente:

$$p''(x, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}(x, t) = f_e(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t \in [0, \infty), \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{p}_i(x) = \begin{bmatrix} \dot{p}(x, 0) \\ p'(x, 0) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad 0 < x < l, \quad t = 0, \quad (6.2b)$$

$$\mathbf{f}_0^T \mathbf{p}(0, t) = \phi(t), \quad \mathbf{f}_l^T \mathbf{p}(l, t) = 0 \quad x = 0, x = l, \quad t \in [0, \infty), \quad (6.2c)$$

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2d)$$

Las ecuaciones 6.2 se basan en las ecuaciones 2.3, donde la única variable de salida que no fue eliminada es la presión ($p(x, t)$).

4.6.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE [1]

Una vez obtenido el problema de condiciones iniciales y de frontera se procede al primer paso del método de la Transformación del Funcional.

La transformada de Laplace aplicada a una PDE como la ecuación 2.3 se puede expresar de manera general de la siguiente forma.

$$\mathcal{L}\{p(x, t)\} = P(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} p(x, t) dt \quad (6.3a)$$

$$\mathcal{L}\{D\{p(x, t)\}\} = d_D(s)P(x, s) - \mathbf{d}_{iD}^T(s)\mathbf{p}_i(x) \quad (6.3b)$$

Donde la variable de frecuencia es de la siguiente forma $s = \sigma + j\omega$. De la ecuación 2.3 $D\{y(x, t)\}$ es el operador que contiene las derivadas temporales y al aplicarle la transformada de Laplace estas derivadas se convierten en multiplicaciones por s , de ahí el polinomio $d_D(s)$, $\mathbf{d}_{iD}(s)$ corresponde a las condiciones iniciales temporales.

$$d_D(s) = -\frac{1}{c^2} s^2 \quad \mathbf{d}_{iD}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} s \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Así que al aplicar la transformada de Laplace, el problema de condiciones iniciales y de frontera de manera general se convierte en el siguiente problema de condiciones de frontera.

$$d_D(s)P(x, s) + L\{P(x, s)\} = F_{ei}(x, s) + \mathbf{d}_{iD}^T(s)\mathbf{p}_i(x) \quad 0 < x < l, \quad (6.5)$$

Donde $L\{Y(x, s)\}$ es el operador que contiene las derivadas espaciales, $F_{ei}(x, s)$ es la transformada de Laplace de las fuerza de excitación.

Las condiciones de frontera se convierten en la siguiente expresión.

$$\mathbf{f}_0^T \mathbf{P}(0, s) = \boldsymbol{\Phi}(s), \quad \mathbf{f}_l^T \mathbf{P}(l, s) = 0 \quad x = 0, x = l, \quad t \in [0, \infty), \quad (6.6)$$

Por lo tanto, mediante la transformada de Laplace se reemplazaron las derivadas temporales por operaciones algebraicas con s , incluyendo las condiciones iniciales como términos aditivos.

4.6.2 TRANSFORMADA DE STURM-LIOUVILLE [1], [8]

Ahora bien, se desea realizar lo mismo con las derivadas espaciales, es decir, convertirlas en multiplicaciones por alguna variable de frecuencia espacial, e incluyendo las condiciones de frontera como elementos aditivos.

La transformada de Sturm-Liouville se define de forma similar a la transformada de Laplace, en este caso el dominio espacial que nos interesa corresponde a una dimensión, por lo tanto consiste en una integral sencilla. Sin embargo, si el rango espacial es de dos dimensiones o tres, sería una integral doble o triple respectivamente.

$$T\{P(x, s)\} = \bar{P}(\mu, s) = \int_0^l K(\mu, x) P(x, s) dx \quad (6.7)$$

En la ecuación 6.6 se expresa la transformada de Sturm-Liouville aplicada de forma general a una ODE con dependencia de s y de x , $\bar{P}(\mu, s)$ es el resultado de esta transformación, y depende de una variable de frecuencia temporal s , y de una frecuencia espacial μ . El rango de integración es la longitud efectiva de la flauta, y el funcional (de ahí el nombre transformación del funcional) es $K(\mu, s, x)$, el cual depende de la naturaleza del problema de condiciones iniciales y de frontera a resolver.

Este kernel de transformación se obtiene mediante la solución al problema de Sturm-Liouville 3.4, cuya solución se encuentra en 3.6

De forma similar a la transformada de Laplace, las condiciones de frontera se convierten en términos aditivos, esto se logra mediante la aplicación de un teorema similar al teorema de la diferenciación en la transformada de Laplace, donde basándose en el problema de Sturm-Liouville, e integrando sobre la específica frontera se tiene el siguiente resultado para problemas de una dimensión.

$$\int_0^l K(\mu, x) L\{P(x, s)\} dx = \lambda_\mu \bar{P}(\mu, s) - \boldsymbol{\Phi}(s) \mathbf{g}_b\{K(\mu, x)\}|_0^l \quad (6.8)$$

Donde $\mathbf{g}_b\{\}$ es el operador auto adjunto de $\mathbf{f}_b\{\}$, $\boldsymbol{\Phi}(s)$ es la transformada de Laplace de una función general de excitación de frontera, la cual es evaluada en ambos extremos de la flauta. Este resultado

surge de la aplicación de varios teoremas matemáticos, como el teorema de la diferenciación, la identidad de LaGrange, la identidad de Green, los problemas de Sturm-Liouville, la teoría de operadores auto adjuntos. Cada uno de estos teoremas matemáticos abarcan conocimientos matemáticos bastante extensos, razón por la cual aquí no son discutidos, para una mayor profundización sobre estos temas se recomienda [8] y [1].

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Ahora bien, para aplicar la ecuación 6.8 al problema de condición de frontera 6.5, mediante la solución obtenida en 3.6, se tiene lo siguiente.

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2, \quad K(\mu, x) = \sin\left(\frac{\mu\pi}{l}x\right) \quad (6.10a)$$

$$\mathbf{g}_b\{K(\mu, x)\} = K'(\mu, x) \quad (6.10b)$$

Como se puede ver λ_μ y $\mathbf{g}_b\{\}$ no dependen de s , esto se debe a que en la PDE inicial no existen derivadas mixtas, es decir, temporales y espaciales sobre $p(x, t)$. Y el problema al tratarse de una sola dimensión el tamaño del vector μ es 1, si se tratase de un problema de dos o tres dimensiones, el tamaño del vector sería 2 o 3 respectivamente.

Las condiciones de frontera, después de la transformada de Sturm-Liouville están dadas por el término sustractivo de la ecuación 6.8, para este problema se sabe que las condiciones de frontera para $x = l$, $\dot{p}(x, t) = 0$, por lo tanto la función $\phi(s)$ sólo se evalúa en $x = 0$.

$$\bar{\phi}(\mu, s) = \phi(s)\mathbf{g}_b\{K(\mu, x)\}\big|_0^l = -\phi_0(s)\left(\frac{\mu\pi}{l}\right) \quad (6.11)$$

Así que al aplicar la transformada de Sturm-Liouville, el problema de condiciones de frontera de manera general se convierte en la siguiente ecuación algebraica.

$$d_D(s)\bar{P}(\mu, s) + \lambda_\mu \bar{P}(\mu, s) = \bar{F}_{ei}(\mu, s) + \mathbf{d}_{ib}^T(s)\bar{\mathbf{p}}_i(\mu) + \bar{\phi}(\mu, s) \quad (6.12)$$

4.6.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA MULTI-DIMENSIONAL [1]

Una vez realizadas las dos Transformadas Funcionales, el resultado es una ecuación algebraica, esta se puede reordenar de la forma de una Función de Transferencia Multi-Dimensional. Así que resolviendo la ecuación 6.12, se obtiene lo siguiente.

$$\bar{P}(\mu, s) = \bar{G}_e(\mu, s)\bar{F}_{ei}(\mu, s) + \bar{\mathbf{G}}_i(\mu, s)\bar{\mathbf{p}}_i(\mu) + \bar{G}_b(\mu, s)\bar{\phi}(\mu, s) \quad (6.13)$$

Donde $\bar{G}_e(\mu, s)$, $\bar{\mathbf{G}}_i(\mu, s)$ y $\bar{G}_b(\mu, s)$ son funciones de transferencias multi dimensionales para las fuerzas de excitación, las condiciones iniciales y las condiciones de frontera respectivamente. Estas están dadas por:

$$\bar{G}_e(\mu, s) = \frac{1}{d_D(s) + \lambda_\mu} \quad (6.14a)$$

$$\bar{G}_i(\mu, s) = \frac{d_{iD}(s)}{d_D(s) + \lambda_\mu} \quad (6.14b)$$

$$\bar{G}_b(\mu, s) = \frac{1}{d_D(s) + \lambda_\mu} \quad (6.14c)$$

La función de transferencia multi-dimensional ha sido obtenida (6.13), como se puede ver el sistema tiene como entradas las condiciones iniciales, las condiciones de frontera y las fuerzas de excitación externas, cada una de estas entradas es filtrada por una función de transferencia, y la salida corresponde a la suma de las tres señales filtradas. En la siguiente figura se puede observar el diagrama de bloques del sistema.

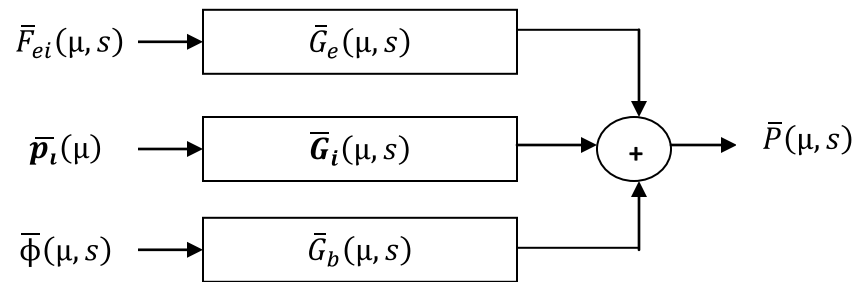


Figura 6.1 Función de transferencia Multi-dimensional. [1]

Las tres funciones de transferencia multi-dimensionales poseen el mismo denominador, el cual depende de una frecuencia temporal ($d_D(s)$) y de una frecuencia espacial (λ_μ).

Ahora bien, en el problema del instrumento de viento se establecieron como homogéneas las fuerzas de excitación externas y las condiciones iniciales, por lo tanto la única función de excitación es debida a las condiciones de frontera, así que la ecuación 6.13 queda reducida a una sola función de transferencia.

$$\bar{P}(\mu, s) = \bar{G}_b(\mu, s)\bar{\Phi}(\mu, s) \quad (6.15a)$$

$$\bar{G}_b(\mu, s) = \frac{1}{-\frac{1}{c^2}s^2 + \left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2} \quad (6.15b)$$

4.6.4 DISCRETIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA MULTI-DIMENSIONAL [1]

Se debe realizar la discretización tanto en tiempo como en espacio de las funciones de transferencia, la discretización en el tiempo puede realizarse con diversos métodos (impulso-invariante, transformada bilineal, etc.) para así obtener una representación del sistema en el dominio-z. La discretización

espacial se realiza simplemente escogiendo un número finito de puntos espaciales entre el rango definido para el instrumento.

Discretización en tiempo. [9], [1]

El proceso llevado a cabo en la discretización en tiempo se realizó mediante la transformación invariante al impulso, donde con $t = kT$ (T es el intervalo de muestreo, $k \in \mathbb{N}$), la representación del sistema en el dominio- z es la siguiente.

$$\bar{P}^d(\mu, z) = \bar{G}_b^d(\mu, z) \bar{\Phi}^d(\mu, z) \quad (6.15a)$$

Donde el superíndice d quiere decir que está en el dominio- z .

La transformación invariante al impulso se basa en que cualquier función de transferencia algebraica se puede convertir en una expansión de fracciones parciales. Una vez estas fracciones parciales son obtenidas, se halla la respuesta impulso a cada fracción, se muestrea esta respuesta impulso, se halla la transformada zeta de la respuesta impulso muestreada, y finalmente se suman las transformadas zeta obtenida de cada fracción, esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

$$H(s) = \frac{C}{s + \alpha} \rightarrow h(t) = Ce^{\alpha t} \rightarrow h(n) = Ce^{\alpha nT} \rightarrow H(z) = \frac{C}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}} \quad (6.16)$$

Así que la transformación invariante al impulso aplicada a la función de transferencia $\bar{G}_b(\mu, s)$ genera los siguientes resultados.

$$\bar{G}_b(\mu, s) = \frac{1}{-\frac{1}{c^2} s^2 + \left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2} = \frac{-c^2}{s^2 - \left(\frac{\mu\pi c}{l}\right)^2} = \frac{\frac{lc}{\mu 2\pi}}{s + \left(\frac{\mu\pi c}{l}\right)} + \frac{-\frac{lc}{\mu 2\pi}}{s - \left(\frac{\mu\pi c}{l}\right)} \quad (6.17a)$$

$$\bar{G}_b(\mu, z) = \frac{\frac{lc}{\mu 2\pi}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi c}{l} T} z^{-1}} + \frac{-\frac{lc}{\mu 2\pi}}{1 - e^{\frac{\mu\pi c}{l} T} z^{-1}} = \frac{-\frac{lc}{\mu\pi} \sinh\left(\frac{\mu\pi c}{l} T\right) z}{z^2 - 2 \cosh\left(\frac{\mu\pi c}{l} T\right) z + 1} \quad (6.17b)$$

En la ecuación 6.17 se puede observar el paso del plano s al plano z .

Discretización en espacio [1]

Dado que el vector μ ya está discretizado (para nuestro problema, el vector es de tamaño $n = 1$), no hay que aplicar un método de discretización. Sin embargo, en el dominio espacial si hay que establecer una discretización.

El siguiente paso en el método de la transformación del funcional es realizar la transformada inversa de Sturm-Liouville, ya que esta nos brinda la solución analítica en el dominio espacial, basta con realizar un muestreo en espacio, es decir evaluar la solución continua en posiciones discretas de la estructura

vibratoria, estas posiciones desde luego deben ser un número finito, y se pueden elegir arbitrariamente.

4.6.5 TRANSFORMACIÓN INVERSA DE STURM-LIOUVILLE [1]

Una vez obtenida la función de transferencia multi-dimensional discreta se procede a realizar la Transformada Inversa de Sturm-Liouville, en los puntos espaciales escogidos en la discretización espacial.

La transformada inversa de Sturm-Liouville se puede ver como una expansión en series de Fourier generalizada, puesto que la función espacial $P(x, s)$ se puede expresar como una sumatoria de valores discretos $d\bar{P}(\mu, s)$ con su correspondiente auto función $K(\mu, x)$

La transformada inversa de Sturm-Liouville está dada por

$$P(x, s) = T^{-1}\{\bar{P}(\mu, s)\} = \sum_{\mu} \frac{1}{N_{\mu}} \bar{P}(\mu, s) K(\mu, x) \quad (6.18)$$

Donde N_{μ} es un factor norma, el cual se obtiene en el proceso matemático involucrado en llegar a $K(\mu, x)$, y está dado por la siguiente expresión, una mayor profundización se encuentra en [1]

$$\int_0^l K(\mu, x) K(\nu, x) dx = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu \\ N_{\mu}, & \nu = \mu \end{cases} \quad (6.19a)$$

$$N_{\mu} = \int_0^l \sin\left(\frac{\mu\pi}{l}x\right) * \sin\left(\frac{\mu\pi}{l}x\right) dx = \frac{l}{2} \quad (6.19b)$$

La implementación de la ecuación 6.18 en un computador no puede ser una sumatoria infinita, para establecer el número límite se debe tener en cuenta la discretización en tiempo. Puesto que al cambiar del plano s al plano z , las frecuencias mayores a la frecuencia de Nyquist no pueden ser reproducidas correctamente, y ocurre un efecto de enmascaramiento. Para reducir este efecto se establece como número finito límite en la sumatoria a μ_T . Dado que μ está directamente relacionado con los polos de la ecuación 6.17b, el polo que le corresponde μ_T (ω_{μ_T}), no deberá ser más grande que la frecuencia de Nyquist, es decir $\omega_{\mu_T} T < \pi$.

Esta suma truncada produce que la precisión del método de la transformada del Funcional no sea 100% correcta, sin embargo este error es preferible a los efectos de enmascaramiento, además al asegurar una frecuencia de Nyquist correcta, por ejemplo muestreando a 44.1kHz, el error debido a la truncación no será oído por el ser humano.

En la ecuación 6.18, la auto función debe ser evaluada en un vector $\mathbf{x}_a$, este vector es producto de la discretización en espacio, y corresponden a posiciones espaciales de la estructura vibratoria elegidos arbitrariamente.

Por lo tanto la transformada inversa de Sturm-Liouville aplicada a la ecuación 6.15 es la siguiente

$$P^d(\mathbf{x}_a, s) = T^{d-1}\{\bar{P}^d(\mu_T, z)\} = \sum_{\mu_T} \frac{1}{N_{\mu_T}} \bar{P}^d(\mu_T, z) K(\mu_T, \mathbf{x}_a) \quad (6.20)$$

Donde se establece como T^{d-1} debido a la suma truncada. El resultado de 6.20 corresponde a una función de transferencia discreta de una dimensión.

Con el fin de obtener una señal discreta en el dominio del tiempo se debe realizar la aplicación de la Transformada Inversa Z a $P^d(\mathbf{x}_a, z)$. El resultado de esta transformación inversa correspondería a $p^d(\mathbf{x}_a, k)$, donde $\mathbf{x}_a$ es el vector espacial y discreto, y k corresponde al dominio temporal resultante debido a la discretización. Esta sería la solución discreta del instrumento de viento.

4.6.6 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Las transformadas inversas de Sturm-Liouville y zeta se pueden implementar en un software de programación como MATLAB mediante sencillos códigos recursivos. La simulación del instrumento de viento se realizará teniendo como función de excitación de frontera la función delta de Dirac. Pues así se conocerá la respuesta impulso del sistema para determinada configuración de la flauta (posición de los dedos).

Por lo tanto hay que tener en cuenta esta función a lo largo de todo el método de la Transformada del Funcional.

$$\phi(t) = \delta(t) \rightarrow \phi(s) = 1 \rightarrow \bar{\phi}(\mu) = -\frac{\mu\pi}{l} \rightarrow \bar{\phi}^d(\mu) = -\frac{\mu\pi}{l} \quad (6.21)$$

En la implementación computacional se asumió una temperatura de 25°C, los cambios debidos a la frecuencia fueron despreciados, y por lo tanto se empleó una velocidad del sonido de $c = 346,000$ mm/s. [4]

La flauta simple en la que se basará la simulación, es una flauta con 6 hoyos de tono, un hoyo en la embocadura, y un hoyo al final. Para determinar la longitud efectiva de la flauta simple dependiendo de la posición de los dedos, se deben solucionar las ecuaciones 2.5-2.8. Esto se realizará con las siguientes medidas basadas en una flauta simple real. [4]

$$d_1 = 17.5 \text{ mm}$$

$$l_1$$

$$l_h = 2.5 \text{ mm}$$

$$\textcircled{1} = 329 \text{ mm}$$

$$d_h = 10.2 \text{ mm}$$

$$\textcircled{2} = 296 \text{ mm}$$

$$l_t = 394 \text{ mm}$$

$$\textcircled{3} = 263 \text{ mm}$$

$$d_0 = 17.5 \text{ mm}$$

$$\textcircled{4} = 230 \text{ mm}$$

$$l_s = 2.5 \text{ mm}$$

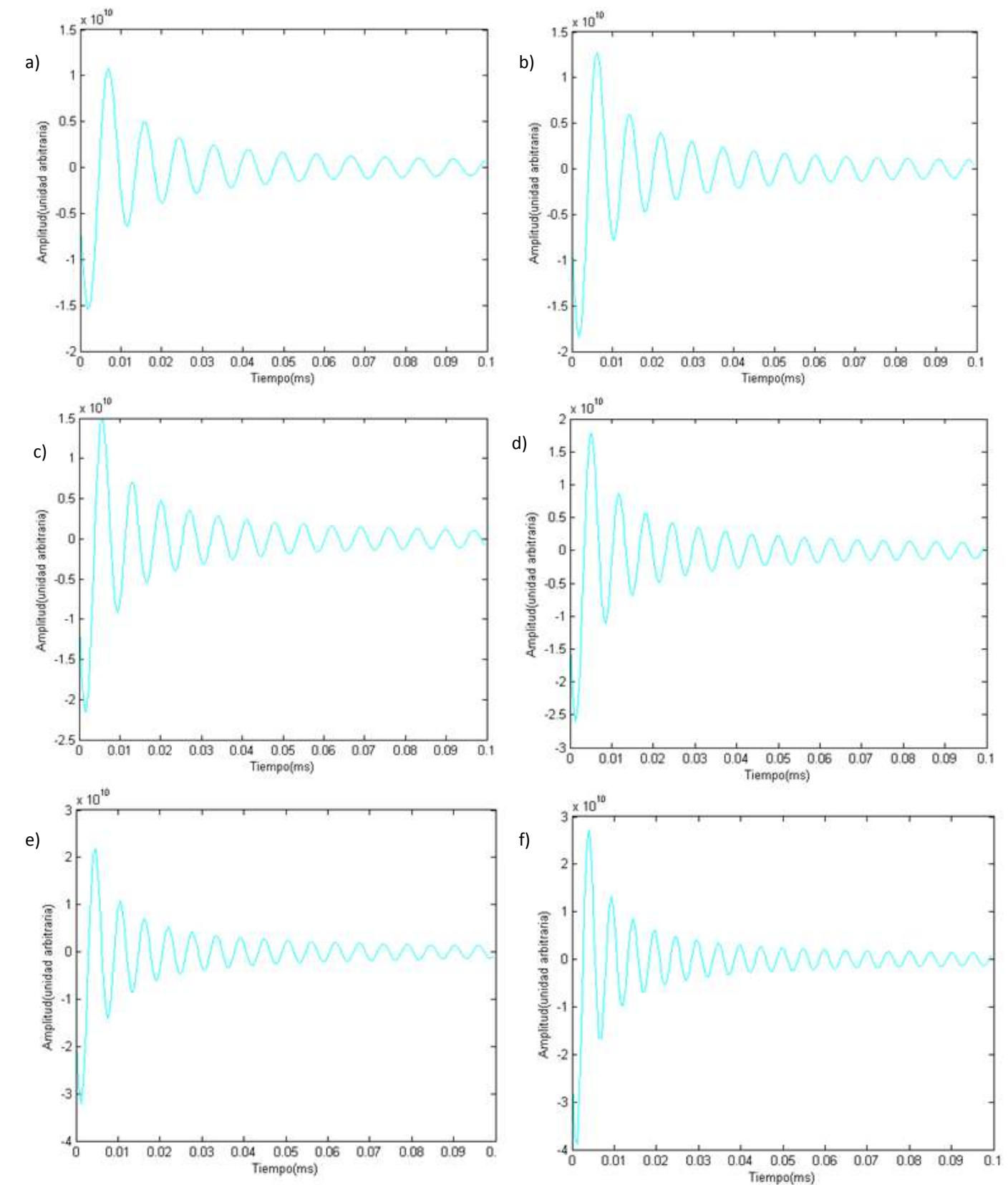
$$\textcircled{5} = 197 \text{ mm}$$

$$d_s = 9.5 \text{ mm}$$

$$\textcircled{6} = 164 \text{ mm}$$

Así dependiendo de la posición de los dedos y de los hoyos de tono que se encuentren tapados, la longitud efectiva de la flauta cambiará.

Una vez implementado el código (Apéndice A) encargado de realizar las transformada inversa Z y de Sturm-Liouville, se simuló con una frecuencia de muestreo de 44.1kHz, el número de máximo de modos (μ_T) fue 59. Se obtuvieron los siguientes resultados para distintas configuraciones de la flauta simple.



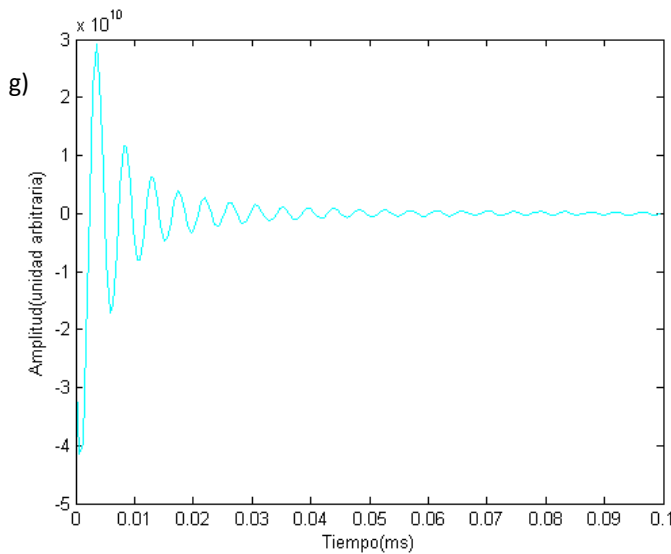


Figura 6.2 Respuesta impulso de una flauta simple, a) Todos los hoyos de tono se encuentran cubiertos. b) El hoyo de tono No. 1 se encuentra descubierto. c) El hoyo de tono No. 2 se encuentra descubierto. d) El hoyo de tono No. 3 se encuentra descubierto. e) El hoyo de tono No. 4 se encuentra descubierto. f) El hoyo de tono No. 5 se encuentra descubierto. g) El hoyo de tono No. 6 se encuentra descubierto.

5 Discusión y Conclusiones

En este proyecto de grado, el cual se basó en la síntesis de sonido digital, se dio una breve explicación de los diferentes métodos de síntesis de sonido, tanto los basados en sonido como los basados en el modelo físico. Se realizó una descripción física y matemática de los instrumentos de viento más simples. Una vez el modelo físico del instrumento de viento fue obtenido se profundizó en las ecuaciones diferenciales parciales, y se estudió la solución de problemas de Sturm-Liouville sobre una ecuación diferencial parcial de una dimensión.

Ya con los conocimientos adquiridos en los puntos mencionados anteriormente se investigó el método de la transformación del Funcional, un algoritmo de síntesis de sonido digital basado en el modelo físico de un instrumento musical. Y se aplicó este método con vistas de realizar la síntesis de sonido de una flauta simple. Como resultado se obtuvo la respuesta impulso de la flauta simple en 7 distintas configuraciones. Así que se Implementó un modelo discreto basado en la transformación del funcional de un instrumento de viento, mediante el modelado físico del mismo.

Para un futuro trabajo, la síntesis de sonido de la flauta simple se puede realizar teniendo en cuenta la función de excitación de frontera que introduce el instrumentista, esta corresponde a un chorro de aire la cual al ser una función no lineal y en continua investigación en la actualidad no presupone una aplicación directa del algoritmo explicado en este proyecto, sin embargo, en [1] existe una profundización en la aplicación de la Transformación del Funcional a instrumentos cuyas funciones de excitación no son lineales.

El algoritmo desarrollado también podría ser mejorado incluyendo unas condiciones de frontera no homogéneas, es decir, tener en cuenta la impedancia generada por un hoyo de tono abierto, la cual depende de la frecuencia, y se describió en 2.9.

Respecto a los resultados obtenidos, se puede observar que entre mayor es la longitud acústica de la flauta (figura 6.2a) la respuesta impulso es decae más lentamente en comparación con una longitud acústica mayor (figura 6.2g). Esto se debe a que la nota generada al tener el hoyo No. 6 descubierto es de una frecuencia mayor a la nota generada con los 6 hoyos cubiertos.

Para realizar una comparación y un análisis de los resultados se podría realizar con una respuesta impulso medida sobre un instrumento real de medidas geométricas similares. Sin embargo, los únicos datos comparables presentes corresponden a la respuesta impulso de varios instrumentos de cobre, como la trompeta, estos se encuentran en [10] y [11]. Los instrumentos de cobre resultan más complejos, pues involucran funciones de Bessel, y debido a sus geometrías basadas en ‘cuernos’, las respuestas impulsos resultan diferentes a las obtenidas en este proyecto de grado.

6 Agradecimientos

El presente Proyecto de Grado es el resultado de un trabajo investigativo, el cual no habría tenido éxito sin las personas que participaron directa o indirectamente en el proceso.

Agradezco a mi padre, madre y hermano que me acompañaron durante todo mi pregrado y que, de forma incondicional, y a pesar de la distancia siempre estuvieron atentos y pendientes de mi carrera universitaria.

Al Profesor Alfredo Restrepo por haber confiado en mí, por la paciencia y por la dirección de este trabajo.

Gracias a todos.

7 Referencias

- [1] Trautmann, L., Rabenstein, R. (2003). *Digital Sound Synthesis by Physical Modeling Using the Functional Transformation Method*, Springer, Nurember, Germany.
- [2] De Poli, G., Piccialli, A., Roads, C. (1991) *Representations of Musical Signals*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA.
- [3] Kahrs, M., Brandenburg, K. (1998). *Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

- [4] Forster, C. (2010). *Musical Mathematics on the art and science of acoustic instruments*. Chronicle Books, San Francisco, USA.
- [5] Fletcher, N., Rossing, T. (1998). *The Physics of Musical Instruments*. SpringerVerlag, New York.
- [6] Pinchover, Y., Rubinstein, J. (2005). *An Introduction To Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Edinburgh, UK.
- [7] Bilbao, S. (2008). *Direct Simulation For Wind Instrument Synthesis*. Proc. Of the 11th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-08), Espoo, Finland, September 1-4, 2008. Music/Acoustics and Fluid Dynamics Group, University of Edinburgh, Edinburgh, UK.
- [8] Churchill, R. (1972). *Operational Mathematics*. McGraw-Hill, New York, 3. Edition.
- [9] Oppenheim, A. and Schaffer, R. (1975). *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, Inc., Eaglewood Cliffs.
- [10] Krach, B., Petrausch, S., Rabenstein, R. (2004). *Digital Sound Synthesis Of Brass Instruments By Physical Modeling*. Multimedia Communications and Signal Processing. University of Erlangen-Nuremberg, Germany. Proc. Of the 7th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx'04). Naples, Italy.
- [11] Vergez, C., Rodet X. (1997). *Comparison of real trumpet playing latex model of lips and computer model*. Proceedings of the 1997 International Computer Music Conference.

8 Apéndices

APÉNDICE A – CÓDIGO MATLAB

```
function [ l ] = longitudEfectiva( hoyo )
% hoyo indica el hoyo de tono que está descubierto en la flauta, 0 es todos los hoyos cubiertos
d_1 = 17.5;
l_h = 2.5;
d_h = 10.2;
l_t = 394;
d_0 = 17.5;
l_e = 2.5;
d_e = 9.5;
l_1 = 329;
l_2 = 296;
l_3 = 263;
l_4 = 230;
l_5 = 197;
l_6 = 164;
delta_l_e = (l_e+d_e)*(d_0/d_e)^2-0.45*d_0;
delta_l_t = 0.31*d_1;
delta_l_h = (l_h+d_h)*(d_1/d_h)^2-0.45*d_1;
if hoyo == 0
    l = delta_l_e + l_t + delta_l_t;
elseif hoyo == 1
    l = delta_l_e + l_1 + delta_l_h;
elseif hoyo == 2
    l = delta_l_e + l_2 + delta_l_h;
elseif hoyo == 3
    l = delta_l_e + l_3 + delta_l_h;
```

```

elseif hoyo == 4
    l = delta_l_e + l_4 + delta_l_h;
elseif hoyo == 5
    l = delta_l_e + l_5 + delta_l_h;
else
    l = delta_l_e + l_6 + delta_l_h;
end
end

function [P] = impulseResponseFlute( hoyo )
% Se obtiene la respuesta impulso de una flauta con determinada configuración de dedos.
Fs = 44100;
T = 1/Fs;
U_t = 59;
c = 346000;
l = round(longitudEfectiva(hoyo));
x_a = (0:0.2:34.6-0.2);
P_xz = zeros (U_t,length(x_a));
p = zeros (U_t,1);
f = zeros (U_t,1);
y = zeros (U_t,1);
syms z

    for u=1:U_t
        n = (-u*pi/l);

        p(u) = subs(iztrans( ( -l*c*(exp(u*pi*c*T/l)-exp(-u*pi*c*T/l))*z/(u*2*pi) ) / (z^2 -
(exp(u*pi*c*T/l)+exp(-u*pi*c*T/l))*z + 1) ) );

    end
    for x=1:length(x_a)
        for u=1:U_t
            f(u) = (l/2)*sin(u*pi*x/l);
        end
        y = p.*f;
        P_xz(:,x) = y;
    end

P=sum(real((P_xz)));
x_a = x_a/c;
plot(x_a*1000,P,'c')
xlabel('Tiempo(ms)');
ylabel('Amplitud(unidad arbitraria)');

end

```

1. Resumen Ejecutivo

- **TÍTULO DEL PROYECTO:**
Síntesis de Sonido Digital de un Instrumento de Viento Usando el Método de la Transformación del Funcional.
- **ESTUDIANTE QUE DESARROLLA EL PROYECTO:**
Marco Antonio Martínez Ramírez.
- **ASESOR DEL PROYECTO DE GRADO:**
Alfredo Restrepo Palacios.

Objetivos del Proyecto de Grado

OBJETIVO GENERAL.

Implementar un modelo discreto basado en la transformación del funcional de un instrumento de viento, mediante el modelado físico del mismo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Realizar una investigación acerca de los distintos métodos de síntesis de sonido digital basados tanto en el modelado físico, como en el sonido.

Descripción: Antes de encarar el objetivo general del proyecto de grado es necesario revisar el estado del arte acerca de la síntesis de sonido digital, y decidir cuál es el mejor camino para seguir dadas las necesidades presentes en el contexto actual.

Porcentaje alcanzado: 100%

Descripción física y matemática de los instrumentos de viento, los resonadores acústicos y la flauta simple.

Descripción: El modelado físico de un instrumento musical y su respectiva síntesis de sonido requiere una descripción física y matemática del instrumento. En este caso, es necesario derivar el comportamiento físico de los instrumentos de viento, los cuales entran en la familia de los resonadores acústicos, y estudiar sus distintas características, como la señal de entrada del instrumento. Uno de los modelos más simple de un instrumento de viento es llamado la flauta simple.

Porcentaje alcanzado: 100%

Realizar una introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, basándose en la ecuación de onda en una dimensión, estudiando diferentes métodos de separación de variables, problemas de Sturm-Liouville y expansiones de autofunciones. Esto aplicado a un instrumento de viento.

Descripción: Dado que los modelos físicos de los instrumentos musicales están basados en ecuaciones diferenciales parciales, un estudio acerca de estas se hace necesario para poder abordar la solución de las mismas mediante la Transformación del Funcional.

Porcentaje alcanzado: 100%

Realizar una investigación acerca del método de la Transformación del Funcional.

Descripción: El método de la Transformación del Funcional es un nuevo método de modelado físico para la síntesis de sonido de instrumentos musicales. Para su debida utilización es necesaria una profunda investigación sobre el método.

Porcentaje alcanzado: 100%

Aplicación de los puntos anteriores para desarrollar la síntesis del modelo físico del instrumento de viento.

Porcentaje alcanzado: 100%

Resultados Esperados

- Completa descripción física de un instrumento de viento.
- Correcta realización de la Transformación del Funcional al modelo físico basado en PDEs de un instrumento de viento.
- Correcta síntesis de sonido de un instrumento de viento mediante la Transformación del Funcional.



NIT: 860.007.386-1

SISTEMA DE BIBLIOTECAS IDENTIFICACIÓN TRABAJO DE GRADO

FECHA DE ELABORACIÓN		
DD	MM	AAAA
30	01	2012

1. IDENTIFICACIÓN AUTOR(ES) DEL TRABAJO DE GRADO					
CÓDIGO	DOCUMENTO DE IDENTIDAD TIPO	NÚMERO	APELLIDOS	NOMBRES	CORREO ELECTRÓNICO
200811033	CC	1020755551	Martínez Ramírez	Marco Antonio	ma.martinez437
	CC				
	CC				
	CC				
	CC				
	CC				

PROGRAMA Pregrado FACULTAD Facultad de Ingeniería DEPARTAMENTO Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica	ENTREGO FORMATO: ☒ SB-10 "Entrega trabajo de grado y autorización de uso a favor de la Universidad de los Andes". Documento con el cual, el autor permite que su trabajo sea utilizado por la Universidad, para fines de consulta y de mención en sus catálogos bibliográficos, tanto físicos como en línea. SB-10:
--	---

1.1 IDENTIFICACIÓN DE TRABAJO DE GRADO PARA DOBLE TITULACIÓN	
PROGRAMA No Aplica FACULTAD No Aplica DEPARTAMENTO No Aplica	TESIS PARA DOBLE TITULACIÓN: ☐ Si el trabajo de grado presentado aplica para obtener dos (2) titulaciones, por favor marque esta casilla y diligencie la información de esta sección.

2. INFORMACIÓN GENERAL DEL TRABAJO DE GRADO	
TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO: Síntesis de Sonido Digital de un Instrumento de Viento Usando el Método de la Transformación del Funcional	
DESCRIPCIÓN FÍSICA Número de páginas: 35 Ilustraciones: 6	MATERIAL ACOMPAÑANTE (Cantidad): Casetes Audio: 0 Discos compactos: 0 Casetes Video: 0 Diapositivas: 0 Disquetes: 0 Otros: ¿Cuáles? 0

FECHA DE ELABORACIÓN		
DD	MM	AAAA
30	01	2012

***RESUMEN DEL TRABAJO DE GRADO:**

La síntesis de sonido consiste en crear sonidos a partir de un medio no acústico, ya sea de forma analógica o digital. Existen varios métodos de síntesis, entre los basados en sonido encontramos la síntesis por tabla de ondas, la síntesis por modulación frecuencial (FM), la síntesis mediante el modulado espectral (aditiva y sustractiva), la síntesis granular. Y entre los basados en modelos físicos encontramos el método de diferencias finitas (Finite difference method), el método de Guías de Ondas Digitales, la síntesis Modal, y el método de la Transformación del Funcional.

El modelado físico, a diferencia de otros métodos no intenta emular el sonido final del instrumento, sino que emula el instrumento en sí, lo cual garantiza un resultado más parecido al instrumento real. Sin embargo el problema con el que se encontró este método es que requiere una capacidad de procesamiento muy grande, la cual en las décadas pasadas no se encontraba disponible. Actualmente la capacidad de procesamiento de los computadores permite la implementación de este tipo de síntesis en tiempo real, y está siendo utilizada en varios programas de síntesis para computadoras.

La elección del modelado físico se basa fundamentalmente por el realismo que se puede obtener al realizar este método, y más que todo, porque la síntesis obtenida hasta el momento en instrumentos de viento (flautas, saxofón, etc.) no es muy similar al sonido real y cualquier oyente puede darse cuenta que se trata de una síntesis por computadora. Otro aspecto importante que cabe destacar, es que mediante este tipo de síntesis se pueden modificar parámetros físicos del instrumento, dándonos la oportunidad de crear instrumentos imposibles físicamente (una flauta de longitud infinita, un tambor de dimensiones enormes).

Las técnicas de modelado físico se pueden agrupar en dos categorías: técnicas de dominio temporal y técnicas de descomposición modal. Las técnicas de dominio temporal abarcan los métodos de Digital Waveguide, Finite Difference Time Domain. Las técnicas de descomposición modal ofrecen los métodos de Síntesis Modal, y Functional Transformation Method.

Este último, el método de la Transformación del Funcional, es el método mediante el cual se realizará la síntesis de sonido digital de un instrumento de viento, método que no ha sido trabajado antes en la Universidad de los Andes ni en Colombia, sino que su investigación durante la última década se ha realizado en países como Alemania, Francia y Finlandia.

OBJETIVOS DEL TRABAJO DE GRADO:

Implementar un modelo discreto basado en la transformación del funcional de un instrumento de viento, mediante el modelado físico del mismo.

Realizar una investigación acerca de los distintos métodos de síntesis de sonido digital basados tanto en el modelado físico, como en el sonido.

Descripción física y matemática de los instrumentos de viento, los resonadores acústicos y la flauta simple.

Realizar una introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, basándose en la ecuación de onda en una dimensión, estudiando diferentes métodos de separación de variables, problemas de Sturm-Liouville y expansiones de auto funciones. Esto aplicado a un instrumento de viento.

Realizar una investigación acerca del método de la Transformación del Funcional.

METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE GRADO:

Este proyecto de grado se basa en el procesamiento de señales y en el modelado físico de instrumentos musicales con objetivo la síntesis de sonido del mismo. El Proyecto consta de diferentes partes, en la parte I se da una breve descripción de los métodos de síntesis basados en sonido, incluyendo la síntesis por tabla de ondas, síntesis granular, síntesis aditiva, sustractiva, y síntesis FM.

En la parte II, se realiza la descripción física y matemática de los instrumentos musicales, en particular los instrumentos de viento, los resonadores acústicos y la flauta simple. Esto de la forma de ecuaciones diferenciales parciales con sus correspondientes condiciones iniciales y de frontera. Posteriormente, en la parte III, ya con la descripción física de los instrumentos, se da una introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, basándose en la ecuación de onda en una dimensión, estudiando diferentes métodos de separación de variables, problemas de Sturm-Liouville y expansiones de auto funciones. Esto aplicado a un instrumento de viento.

La parte IV consta de un resumen de cómo realizar la discretización de los modelos físicos de los instrumentos musicales a través de las distintas técnicas de síntesis de sonido basadas en el modelado físico. La explicación del método de la Transformación del Funcional se lleva a cabo en la parte V, el cual es la directa aplicación de transformaciones de funcionales en tiempo y espacio con el fin de resolver los problemas de condiciones iniciales y de frontera en las ecuaciones diferenciales parciales derivadas en la parte II y III.

CONCLUSIONES DEL TRABAJO DE GRADO:

En este proyecto de grado, el cual se basó en la síntesis de sonido digital, se dio una breve explicación de los diferentes métodos de síntesis de sonido, tanto los basados en sonido como los basados en el modelo físico. Se realizó una descripción física y matemática de los instrumentos de viento más simples. Una vez el modelo físico del instrumento de viento fue obtenido se profundizó en las ecuaciones diferenciales parciales, y se estudió la solución de problemas de Sturm-Liouville sobre una ecuación diferencial parcial de una dimensión.

Ya con los conocimientos adquiridos en los puntos mencionados anteriormente se investigó el método de la transformación del Funcional, un algoritmo de síntesis de sonido digital basado en el modelo físico de un instrumento musical. Y se aplicó este método con vistas de realizar la síntesis de sonido de una flauta simple. Como resultado se obtuvo la respuesta impulso de la flauta simple en 7 distintas configuraciones. Así que se Implementó un modelo discreto basado en la transformación del funcional de un instrumento de viento, mediante el modelado físico del mismo.

Para un futuro trabajo, la síntesis de sonido de la flauta simple se puede realizar teniendo en cuenta la función de excitación de frontera que introduce el instrumentista, esta corresponde a un chorro de aire la cual al ser una función no lineal y en continua investigación en la actualidad no presupone una aplicación directa del algoritmo explicado en este proyecto, sin embargo, en [1] existe una profundización en la aplicación de la Transformación del Funcional a instrumentos cuyas funciones de excitación no son lineales.

El algoritmo desarrollado también podría ser mejorado incluyendo unas condiciones de frontera no homogéneas, es decir, tener en cuenta la impedancia generada por un hoyo de tono abierto, la cual depende de la frecuencia, y se describió en 2.9.

Respecto a los resultados obtenidos, se puede observar que entre mayor es la longitud acústica de la flauta (figura 6.2a) la respuesta impulso es decae más lentamente en comparación con una longitud acústica mayor (figura 6.2g). Esto se debe a que la nota generada al tener el hoyo No. 6 descubierto es de una frecuencia mayor a la nota generada con los 6 hoyos cubiertos.

***PALABRAS CLAVES (TEMAS) DEL TRABAJO DE GRADO:**

Procesamiento de señales, Síntesis de sonido digital, Síntesis de sonido basada en el modelado físico, Transformación del Funcional, Transformada de Laplace, Transformada de Sturm-Liouville, Transformación al impulso invariante, Descripción Física de instrumentos de viento, Función de transferencia multi-dimensional

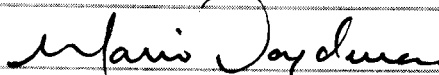
ACUERDOS DE CONFIDENCIALIDAD: ☒ NO TIENE ACUERDO(S) ☐ TIENE ACUERDO(S)

Si selecciona tener acuerdo de confidencialidad, por favor diligencie el siguiente cuadro:

Persona natural o jurídica	Desde			Hasta		
	DD	MM	AAAA	DD	MM	AAAA

3. FIRMAS

AUTORES (Nombre completo)	*FIRMAS
Marco Antonio Martínez Ramírez	Marcel Martínez
DIRECTORES / ASESORES (Nombre completo)	*FIRMAS
Alfredo Restrepo P.	AWP.

JURADO / LECTOR (Nombre completo)	*FIRMAS
Mario Jalderrama	

Las firmas de Autor y Director/Asesor son obligatorias. Si tiene inconvenientes con el registro de la firma del Jurado/Lector, deberá tramitar ante la respectiva Facultad la autorización para registrar las firmas de pares o un sello que justifique la ausencia de la firma faltante.

SB-09

[Verificar Información](#)

[Imprimir](#)

**ENTREGA EJEMPLAR TRABAJO DE GRADO Y
AUTORIZACIÓN DE SU USO A FAVOR DE LA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES**

Yo Marco Antonio Martínez Ramírez, mayor de edad, vecino de Bogotá D.C., identificado con la Cédula de Ciudadanía N° 1020755551 de Bogotá, actuando en nombre propio, en mi calidad de autor del trabajo de tesis, monografía o trabajo de grado denominado:
Síntesis de Sonido Digital de un Instrumento de Viento Usando el Método de la Transformación del Funcional

, hago entrega del ejemplar respectivo y de sus anexos del ser el caso, en formato digital o electrónico (CD-ROM) y autorizo a LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, utilice y use en todas sus formas, los derechos patrimoniales de reproducción, comunicación pública, transformación y distribución (alquiler, préstamo público e importación) que me corresponden como creador de la obra objeto del presente documento. PARÁGRAFO: La presente autorización se hace extensiva no sólo a las facultades y derechos de uso sobre la obra en formato o soporte material, sino también para formato virtual, electrónico, digital, óptico, usos en red, internet, extranet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR - ESTUDIANTES, manifiesta que la obra objeto de la presente autorización es original y la realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, por lo tanto la obra es de su exclusiva autoría y tiene la titularidad sobre la misma. PARÁGRAFO: En caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, EL ESTUDIANTE - AUTOR, asumirá toda la responsabilidad, y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados; para todos los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe.

Para constancia se firma el presente documento en dos (02) ejemplares del mismo valor y tenor, en Bogotá D.C., a los Treinta 30 días del mes de Enero de Dos Mil doce 20 12.

EL AUTOR - ESTUDIANTE.

(Firma) Marco Martínez

Nombre Marco Antonio Martínez Ramírez

C.C. N° 1020755551 de Bogotá