

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni

Classe 32



**MATEMATICA E MUSICOLOGIA:
LA COSTRUZIONE DEI TEMPERAMENTI**

Tesi di Laurea
In
Fisica matematica

Laureando
Silvio Gregorini

Relatore
Prof. Stefano Isola

ANNO ACCADEMICO 2010 / 2011

MATEMATICA E MUSICOLOGIA: LA COSTRUZIONE DEI TEMPERAMENTI

Capitolo 1: Introduzione all'argomento

1.1 Breve introduzione storica	1
1.2 Il suono	5

Capitolo 2: Gli strumenti matematici

2.1 Morfismi e Teoria Gruppale	11
2.2 Frazioni continue	15
2.3 Convessità e compattezza	18

Capitolo 3: Temperamenti musicali

3.1 Cos'è un temperamento musicale	20
3.2 I temperamenti naturali	23
3.3 Spirale delle quinte, commi e scismi	27
3.4 I temperamenti equabili	30
3.5 I temperamenti ben formati	33

Capitolo 4: Consonanza e dissonanza

4.1 Consonanza e dissonanza: possibili spiegazioni	35
4.2 Misure di consonanza	37
4.3 Misura di qualità del fit	41
4.4 Considerazioni sui temperamenti equabili	43

Capitolo 5: Aspetti algebrici e geometrici

5.1 Descrizione gruppale del temperamento naturale	46
5.2 Realizzazione e descrizione geometrica dei temperamenti	52

Capitolo 6: Convessità, compattezza e consonanza	
6.1 Convessità e sollevabilità convessa	60
6.2 Osservazioni sul concetto di convessità e sollevabilità convessa nei reticoli	64
6.3 Compattezza e consonanza degli insiemi nello spazio P_3 e dei nomi delle note	68
6.4 Risultati e considerazioni	72
 Capitolo 7: Conclusioni	 75
 Bibliografia	

*Alla mia famiglia,
che supporta e sopporta me e la mia chitarra.*

*Ai miei amici,
compagni di studio, giochi e musica.*

*A Chiara,
lei che è minore di tre.*

CAPITOLO 1: INTRODUZIONE ALL'ARGOMENTO

«La musica è pura algebra dell'incantesimo»

Conrad Potter Aiken, romanziere e poeta.

1.1 Breve introduzione storica

La musica ha sempre affascinato l'uomo. Fin dalla nascita dell'umanità, l'organizzazione dei suoni e dei rumori nell'ottica ritmica (a partire dalla musica tribale) e melodica (con l'introduzione di suoni in sequenza consonanti tra loro) è stata utilizzata per gli scopi più disparati, dai riti propiziatori di stampo mistico-religioso ai segnali bellici, dall'esaltazione del potente di turno al semplice diletto dell'ascoltatore. Essa si è spesso evoluta però senza che i suoi autori si soffermassero su alcuni suoi aspetti; in particolare, perché si è evoluta in un modo piuttosto che in un altro? Perché le componenti di base della musica hanno date caratteristiche e non altre? In che modo si potrebbero spiegare o implementare i "sistemi" musicali finora conosciuti e costruiti?

Possibili risposte a queste domande sono state avanzate pian piano nel tempo grazie all'approccio metodico e rigoroso tipico delle scienze naturali. Dalle esperienze empiriche sono emersi degli aspetti strutturali della musica, quali consonanza e dissonanza, ritmo, temperamenti, e così via, che sono stati studiati con opportuni metodi dalla teoria musicale, che accompagna la pratica musicale nella sua evoluzione attraverso i secoli. La teoria, nel suo lavoro, sfrutta più discipline: in particolare, la fisica, la filosofia, la psicologia e la sociologia. D'altro canto, è stato fatto nel tempo un lavoro di astrazione di questi livelli attraverso la matematica, che ha permesso l'elaborazione di "passaggi" tra le varie discipline tramite appositi modelli. Tali modelli sono stati poi in grado non solo di descrivere e formalizzare gli aspetti musicali sopra descritti, ma anche di crearne di nuovi mettendo in pratica elementi matematici che non corrispondono ad alcun aspetto musicale preesistente.

Nella pratica musicale, sebbene sia utile saper riconoscere un unico suono a sé stante (caratteristica di chi possiede il cosiddetto *orecchio assoluto*), è ancor più utile saper lavorare con sequenze di suoni. Due suoni semplici consecutivi formano un intervallo. Ovviamente, per poter lavorare con più suoni, bisogna tener presente che una loro sequenza, o comunque l'insieme di essi, deve essere tale che la composizione sia gradevole all'orecchio umano, oppure che lo sia in maniera limitata o che non lo sia affatto, a seconda degli intenti del compositore. In altre parole, non si può fare a meno di parlare di consonanza; ma su questo concetto sorgono già i primi problemi, perché non esiste una definizione univoca di questa caratteristica. Analogamente, non

esiste una definizione univoca della sua antitesi, o meglio, di dissonanza. Varie definizioni sono state proposte nel corso dei secoli, e quella che è stata, probabilmente, la prima legge naturale definita in termini matematici è appunto la *Legge della consonanza*:

“Un intervallo risulta consonante se è esprimibile come rapporto di due piccoli numeri interi. Più semplice è il rapporto, più consonanti sono le note dell'intervallo.”

Questa definizione fu proposta da Pitagora – furono i greci, infatti i primi a studiare in profondità i rapporti tra musica e matematica, e a Pitagora si è soliti attribuire l'osservazione che gli intervalli musicali corrispondono a rapporti numerici¹. Egli si servì di uno strumento, il monocordo, costituito da una corda tesa di lunghezza fissata che veniva fatta vibrare tra due ponticelli. Tramite un terzo apposito ponticello mobile era possibile dividere la corda in due parti di lunghezza arbitraria, ottenendo così suoni di altezza variabile.

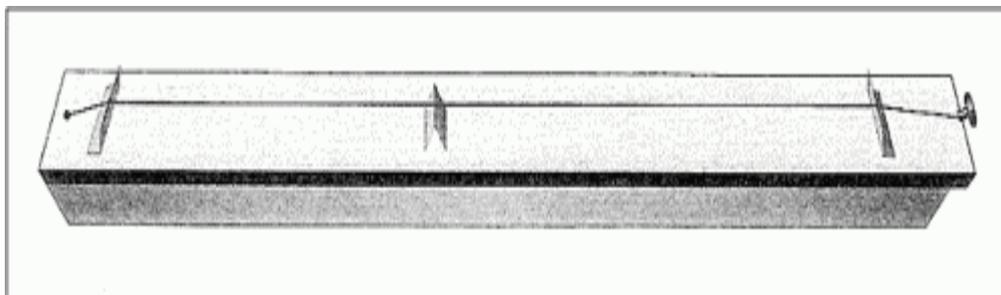


Figura 1: modello di monocordo.

Sperimentando col monocordo e basandosi sulla legge della consonanza, Pitagora stabilì che il rapporto più consonante aveva luogo nell'istante in cui suddivideva la corda in due parti esattamente uguali. Così, il rapporto che definiva la relazione tra la frequenza finale della corda suddivisa, e la frequenza iniziale della corda intera, era pari a 2:1, ed era anche il rapporto più consonante di tutti. A questo rapporto viene dato, convenzionalmente, il nome di ottava, perché nella scala diatonica in uso nella cultura musicale occidentale quest'intervallo è diviso in otto note (contando gli estremi). È interessante vedere come, nelle più disparate culture, questo intervallo sia spesso preso di riferimento, sebbene con una suddivisione interna diversa: ad esempio, i cinesi lo dividono in 5 parti, gli arabi in 17, gli indiani in 22.

I pitagorici osservarono conseguentemente che altri rapporti consonanti erano i rapporti di quinta perfetta 3:2 e di quarta perfetta 4:3 (senza contare, ovviamente, l'intervallo di prima 1:1). Ed è sui rapporti di quinta perfetta e di ottava che i pitagorici costruirono il loro proprio temperamento, su cui torneremo più avanti.

¹ Due suoni diversi non vengono confrontati dall'orecchio umano tramite la differenza delle loro frequenze, ma tramite la differenza tra i logaritmi delle loro frequenze; poiché $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$, allora diventa ovvio che fare il confronto tra suoni percepiti tramite la differenza tra i logaritmi delle frequenze o il rapporto delle frequenze è equivalente.

Nei secoli a seguire, la maggior parte della musica occidentale si basò sul temperamento pitagorico. Nell'Europa medioevale, i teorici continuavano ancora a descrivere un solo tipo di scala, costruita con il metodo attribuito a Pitagora. Solo nel Rinascimento, grazie all'interessamento dei teorici musicali dell'epoca (quali Marsilio Ficino, Franchino Gaffurio, Gioseffo Zarlino e Vincenzo Galilei) e di artisti loro contemporanei (Leon Battista Alberti, Leonardo da Vinci, Filippo Brunelleschi) si ricominciò a studiare la teoria musicale nell'ottica dell'innovazione, oltre che del mero studio concettuale. A questi studiosi si affiancarono menti più vicine alle scienze e alla filosofia naturale, arrivando ad appassionare personaggi quali Keplero, Mersenne, Galileo, Stevino, Cartesio, Huygens, Hooke e Newton.

Mentre Pitagora fondava la sua impostazione musicale sulla quaterna composta dagli intervalli di prima 1:1, quarta perfetta 4:3, quinta perfetta 3:2 e ottava 2:1, nel Rinascimento Zarlino pensò di allargare questo insieme introducendo altri intervalli. Essi erano l'intervallo di terza maggiore 5:4 e terza minore 6:5; interpolando questi intervalli con quelli già presenti, si ottenevano gli intervalli di seconda, sesta e settima maggiore e minore, in questo modo:

- Seconda = Quinta perfetta - Quarta perfetta =
$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$
- Sesta maggiore = Quarta perfetta + Terza maggiore =
$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$
- Settima maggiore = Quinta perfetta + Terza maggiore =
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

In maniera analoga Zarlino calcolò gli intervalli di sesta minore e settima minore, sostituendo alla terza maggiore il rapporto di terza minore. Importante è citare qui Mersenne, che nella sua opera *Harmonie Universelle* (1636) definì l'esistenza di diversi gradi di consonanza e dissonanza, eliminando così la dicotomia che si era stabilita tra le due caratteristiche e che impediva, in qualche modo, l'accettazione di nuovi intervalli, ritenuti a priori dissonanti perché non canonici rispetto ai quattro intervalli preesistenti nella teoria musicale sviluppata dai pitagorici. C'è anche da notare che le innovazioni portate da Zarlino furono soltanto l'inizio di un nuovo processo che trovò rilevanti ostacoli fin dalla sua nascita. Lo stesso era avvenuto, ad esempio, nel 1319 a Johannes de Muris e nel 1320 Philippe de Vitry, due personalità attive alla Sorbona. Nelle loro opere avevano manifestato la necessità di un ampliamento della musica fin ad allora conosciuta; non esitò a rispondere a tali innovativi orientamenti Papa Giovanni XXII, che con la bolla *Docta sanctorum patrum* (1324) condannava chi faceva uso della "nuova musica" e limitava l'utilizzo agli accordi di ottava, quinta e quarta come semplice arricchimento melodico d'accompagnamento per il canto ecclesiastico. Fortunatamente, l'evoluzione della musica non si è però fermata. Anzi, nel corso del XX Secolo, grazie all'introduzione degli strumenti elettronici (i cosiddetti *elettrofoni*, nella Classificazione di Hornbostel-Sachs secondo la revisione della Galpin Society Journal del 1961) e di nuovi strumenti matematici, nuovi ed importanti contributi sono stati raggiunti.

In questa tesi verranno studiati e confrontati alcuni degli aspetti matematici emersi nel XX Secolo. In particolare, si vorranno affrontare i problemi di caratterizzazione dei temperamenti musicali utilizzando tre particolari teorie matematiche: la teoria delle frazioni continue per la costruzione e l'implementazione dei temperamenti equabili; la teoria grupale, come proposto da Gerald Balzano nel suo "*Group theoretical description of 12-fold and microtonal pitch systems*" (1980); la teoria geometrica che sfrutta i concetti di convessità e concavità, come proposta da Aline Honingh nel suo "*The Origin and Well-Formedness of Tonal Pitch Structures*" (2006).

1.2 Il suono

Per fare quanto proposto, sarà necessario chiarire preliminarmente alcuni concetti relativi al suono e alla sua percezione. Riprendendo il monocordo, si supponga che una corda stia vibrando. Essa vibrerà con una data frequenza ν , che identifica il numero di oscillazioni al secondo, ed una qual certa ampiezza, che identifica la differenza tra la massima pressione prodotta dalla corda e la pressione ambientale. Di questi due parametri, la frequenza è quello che identifica quanto acuto o basso sia un suono. In generale, la vibrazione è dovuta ad una sovrapposizione di automodi, vibrazioni elementari determinate dal numero di nodi e ventri. Tale numero è intero e determina la frequenza fondamentale della vibrazione; le altre frequenze in gioco saranno quindi multiple di questa frequenza fondamentale, ottenendo così la cosiddetta serie armonica: $\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, 5\nu, 6\nu, 7\nu\dots$ (v. Figura 2).

Utilizzando un modello semplificato, la vibrazione di una corda può essere espressa matematicamente tramite l'utilizzo del moto armonico e delle onde sinusoidali. Assumendo la massa m della corda tutta centrata nel suo punto medio ad una distanza y dal punto di equilibrio della corda, allora questa esercita sul punto materiale una forza F per riportare quel punto all'equilibrio, cioè a $y = 0$. Per valori di y sufficientemente piccoli, l'intensità di F è proporzionale ad y , come definisce la Legge di Hooke:

$$F = -ky$$

Sfruttando la legge del moto di Newton $F = ma$ con $a = \frac{d^2y}{dt^2}$, si può rielaborare la relazione precedente come:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0$$

la cui soluzione sarà del tipo:

$$y = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Questa espressione designa una funzione oscillante periodicamente nel tempo, con periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ e frequenza $\nu_1 = 1/T$.

Ricordando inoltre le relazioni trigonometriche:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

riscrivendo:

$$y = A \cos(2\pi\nu_1 t) + B \sin(2\pi\nu_1 t) = C \sin(2\pi\nu_1 t + \alpha)$$

dove α è definita fase, e avremo le relazioni:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \alpha = \arctg\left(\frac{A}{B}\right)$$

ed inversamente:

$$A = C \sin \alpha, \quad B = C \cos \alpha$$

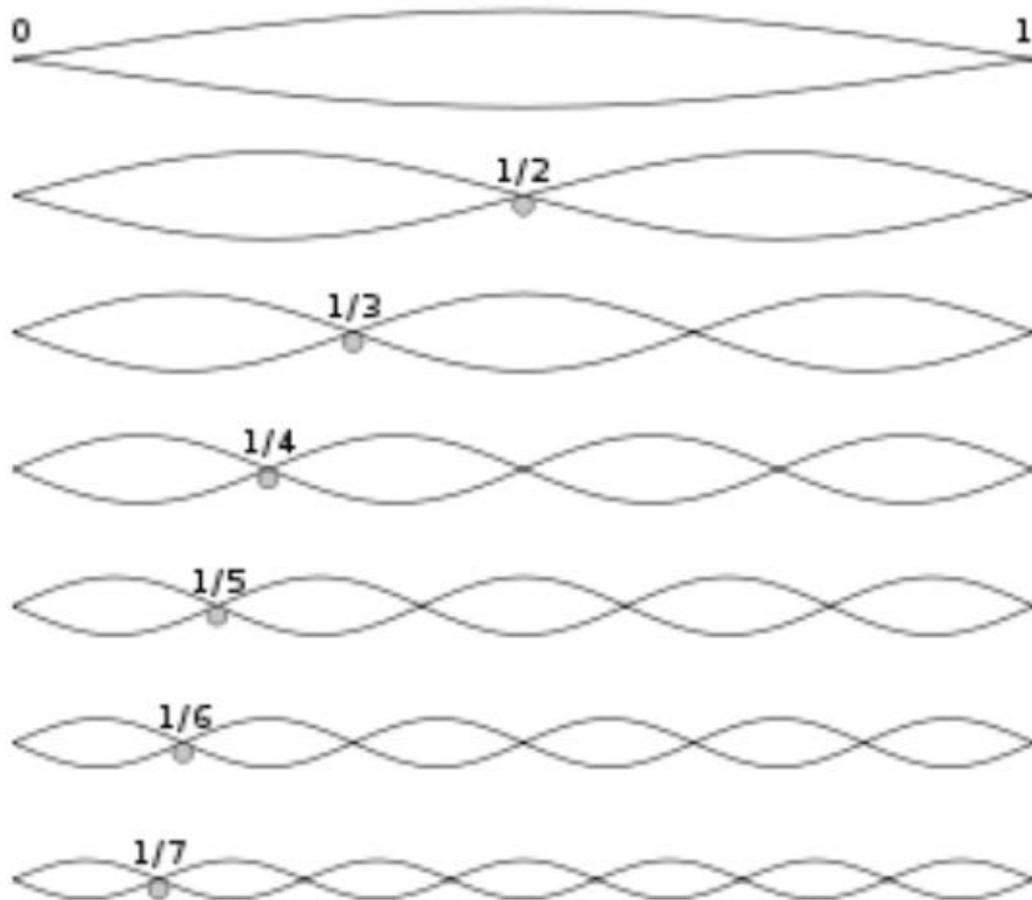


Figura 2: rappresentazione della vibrazione di una corda di lunghezza unitaria con frequenze $\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, 5\nu, 6\nu, 7\nu$ e posizione dei relativi (primi) nodi.

Si può ora pensare di distribuire la massa uniformemente in tutta la nostra corda vibrante secondo la relazione di densità lineare $\rho = m/l$. Ma a questo punto, la corda potrebbe vibrare in altri modi rispetto a prima. Ad esempio, potrebbe formarsi un nodo a metà della corda², la quale, se prima vibrava a frequenza ν_1 , ora vibra con una frequenza $\nu_2 = 2\nu_1$. Si crea quindi la seconda armonica, che sta un'ottava sopra alla fondamentale.

Questa situazione è descritta dalla funzione:

$$y = A \cos\left(2 \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \sin\left(2 \sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

La generica n-esima armonica sarà descritta come:

$$y = A \cos\left(n \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \sin\left(n \sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

e ricordando che il suono della corda che vibra altri non è che la sovrapposizione di queste armoniche (ciascuna con la sua ampiezza), esso sarà descritto da una funzione della forma:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B_n \sin\left(n \sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Una corda può comunque essere messa in vibrazione per vie diverse: per pizzicamento, sfregamento, percussione, ecc. Diversi tipi di messa in vibrazione produrranno armoniche differenti per insiemi di ampiezza A_n e B_n e dunque differenti onde sonore. In ogni caso, esistono degli armonici in cui gli insiemi di ampiezza possono ammettere valori nulli (ovvero, per taluni \bar{n} , vale $A_{\bar{n}} = B_{\bar{n}} = 0$). Si definiscono dunque armonici parziali quegli armonici che hanno almeno una delle due ampiezze non nulle. Gli armonici parziali sono, infine, i principali responsabili del timbro del suono, che è la qualità del suono che ci permette di distinguere due suoni diversi a parità di frequenza e intensità sonora.

La sovrapposizione di suoni con frequenze, ampiezze e fasi differenti dà vita ad importanti effetti acustici. Se due suoni si sovrappongono con uguale frequenza, allora il suono risultante avrà la stessa frequenza delle onde sonore di partenza, e per ampiezza la somma delle due ampiezze se la differenza di fase delle onde iniziali è

² Questo si può fare, ad esempio, premendo leggermente una corda di chitarra a metà della sua lunghezza, rilasciando poi subito dopo aver pizzicato la corda.

pari a $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), producendo il fenomeno di interferenza costruttiva. Se invece le due fasi sono differenti di un angolo pari a $(2k + 1)\pi$, le ampiezze si annulleranno, dando vita al fenomeno di interferenza distruttiva.

In generale, siano:

$$y_1 = C_1 \sin(2\pi vt + \alpha_1), \quad y_2 = C_2 \sin(2\pi vt + \alpha_2)$$

due onde che si sovrappongono. Allora l'onda generata avrà ampiezza pari a

$$C = (C_1 + C_2) \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)$$

Che succede, invece, se le onde sono in fase, con frequenze diverse ma molto vicine? La sovrapposizione di due onde con frequenze differenti ma vicine produce un suono avente per frequenza la media aritmetica delle frequenze iniziali, e con la modulazione d'ampiezza costituita da una lenta oscillazione di frequenza pari alla metà della differenza delle frequenze iniziali. Questo effetto dà vita ai cosiddetti battimenti.

Matematicamente parlando, partendo dalla relazione trigonometrica

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

si pone $u = \alpha + \beta$ e $v = \alpha - \beta$, ottenendo:

$$\sin u + \sin v = 2 \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

La sovrapposizione delle onde di frequenza u e v può essere rappresentata come:

$$y = \sin(2\pi ut) + \sin(2\pi vt)$$

ovvero, per la precedente identità trigonometrica:

$$y = 2 \sin\left(2\pi \frac{u + v}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{u - v}{2} t\right)$$

ottenendo così la tesi. L'effetto dei battimenti è molto importante soprattutto nell'accordatura degli strumenti: fissata una frequenza u "accordata", si fa variare la frequenza v prodotta da un'altra componente dello strumento fino a far annullare il termine modulante $\frac{u-v}{2}$, cosicché si abbia $\cos\left(2\pi \frac{u-v}{2} t\right) = \cos(0) = 1$.

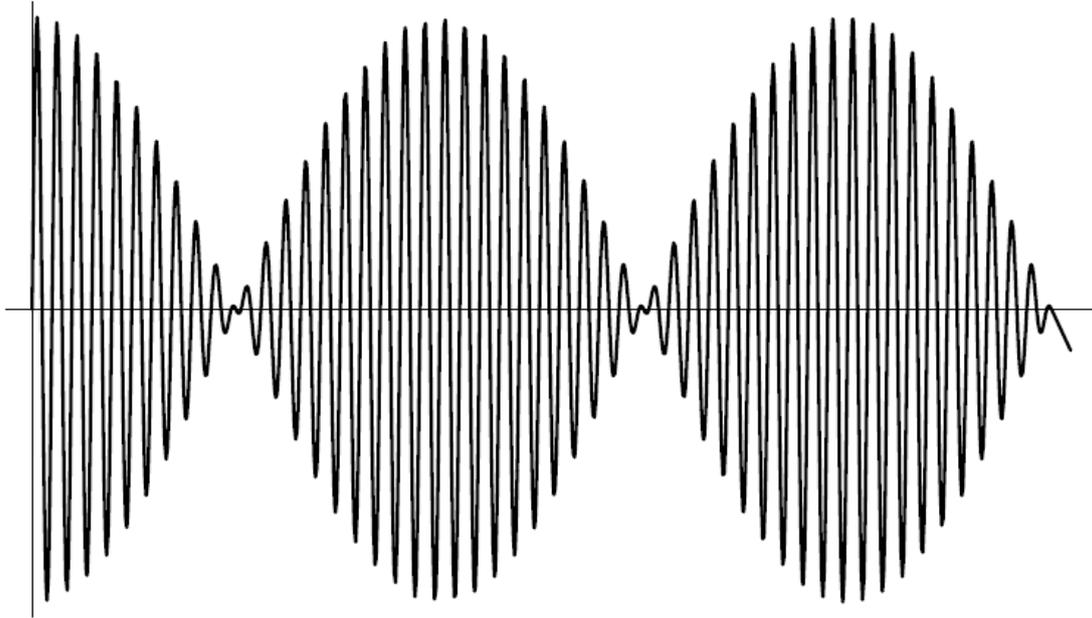


Figura 3: grafico della somma di due onde sinusoidali con rapporto di frequenze pari a 1:1,05. Sull'asse x è rappresentato il tempo, l'ampiezza dell'onda sull'asse y .

Tuttavia, due suoni con frequenze molto vicine possono anche essere percepite dall'orecchio umano in maniera differente rispetto ai battimenti. Se due frequenze sono tali che all'orecchio i relativi suoni non sono distinguibili, allora questi suoni sono all'interno della stessa larghezza di banda critica (LBC). La larghezza di tale banda è dunque definita come il massimo intervallo tra le frequenze di due suoni simultanei che l'orecchio non risolve come distinti³. In maniera simile, si definisce la minima differenza notevole (MDN) come la più piccola differenza di cambio di frequenza tra due suoni consecutivi affinché i suoni non vengano percepiti come identici dall'ascoltatore. La MDN altro non è che una (approssimata) percentuale costante della LBC, ma è necessario far notare alcune differenze tra esse:

- la LBC viene studiata su suoni contemporanei, che possono essere in numero arbitrario, mentre la MDN su suoni consecutivi, che sono quindi solo due;
- la MDN è sottoposta ad aspetti soggettivi legati all'ascoltatore, ma soprattutto alla sua esperienza musicale.

L'altezza percepita di un suono consistente in una certa fondamentale ed un numero finito di parziali è solitamente uguale a quella di un'onda sinusoidale di frequenza pari alla fondamentale. Tuttavia, si è scoperto che rimuovere la fondamentale dal suono non ne cambia la percezione: la fondamentale può ancora essere osservata in esso. Questo fenomeno è stato definito *virtual pitch*. Questo accade per lo più quando i parziali armonici ricadono approssimativamente nell'intervallo di frequenze compreso tra 500 Hz e 2000 Hz, definito regione di dominanza. È stato inoltre verificato che si può ottenere il *virtual pitch* anche con due soli parziali presenti in tale regione, o addirittura con un unico parziale e del rumore

³ Significa dire che se più suoni rientrano nella stessa banda critica, l'orecchio li processa come un unico suono combinato, e non come suoni distinti tra loro.

di sottofondo (sotto opportune condizioni). J. F. Schouten, studioso di psicoacustica, osservò che il fenomeno si presentava a condizione che il suono assumesse una forma d'onda periodica, in quanto la periodicità di un suono non varia se la fondamentale viene rimossa, formulando perciò una sua teoria basata sulla caratteristica del periodo del suono⁴. Sfortunatamente, negli anni Cinquanta, nuovi esperimenti portarono alla revisione di questa teoria, poiché si osservò che anche suoni non periodici potevano produrre un proprio *virtual pitch*. Non solo: addirittura suoni composto da parziali inarmonici riuscivano ad indurre un *virtual pitch*, il quale si prospetta in questi casi come la fondamentale della serie armonica più vicina ai parziali del suono. Altri suoni contenenti parziali inarmonici sono stati invece in grado di produrre più *virtual pitch* (ma non contemporaneamente), a seconda del contesto.

Infine, due suoni semplici con frequenze vicine e con un'alta pressione sonora⁵ possono portare alla percezione dei cosiddetti toni combinati. Queste combinazioni vengono percepite dall'orecchio come prodotto di caratteristiche di trasmissione non-lineari. I toni combinati non sono presenti nel suono in sé, ma vengono percepiti dall'orecchio come se fossero presenti; inoltre, l'orecchio non riesce a distinguere tra le componenti "reali" del suono ed i toni combinati. Per eliminare questi toni, è sufficiente aggiungere al suono un tono di pari frequenza ed ampiezza e fase opposta per ogni tono combinato presente. Per caratterizzare questi toni, sia y la combinazione di due toni semplici di frequenza u e v :

$$y = \cos(2\pi ut) + \cos(2\pi vt)$$

Una trasmissione del suono lineare sarà della forma:

$$d = c_0 + c_1 y$$

dove c_1 e c_2 sono delle costanti fissate. Una trasmissione non-lineare sarà invece del tipo:

$$d = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \dots + c_n y^n$$

Sviluppando il termine y^2 :

$$\begin{aligned} y^2 &= (\cos(2\pi ut) + \cos(2\pi vt))^2 = \\ &= 1 + \frac{\cos(2\pi 2ut)}{2} + \frac{\cos(2\pi 2vt)}{2} + \cos(2\pi(u+v)t) + \cos(2\pi(u-v)t) \end{aligned}$$

dove compaiono toni di frequenza $2u$, $2v$, $u+v$, $u-v$ non presenti nel suono originale. In particolare, i toni di frequenza $u+v$, $u-v$ vengono definiti toni combinati di primo grado. Sviluppando il termine cubo compaiono le frequenze $3u$, $3v$, $2u+v$, $u+2v$, $2u-v$, $2u-v$, dove gli ultimi quattro valori sono definiti toni combinati di secondo grado. Questo processo può essere ripetuto per ogni grado della combinazione non-lineare. Le componenti della forma $nu + mv$ vengono definiti toni somma, quelle della forma $nu - mv$ toni differenza. I toni del primo grado sono solitamente percepiti più di quelli di gradi superiori, ed i toni differenza sono percepiti più dei toni somma.

⁴ In particolare, il *virtual pitch* di un suono poteva essere dedotto dalla forma d'onda dello stesso, a patto che fosse periodica.

⁵ La pressione sonora è definita come la variazione di pressione rispetto alla condizione di quiete causata dalla perturbazione di un'onda sonora.

CAPITOLO 2: GLI STRUMENTI MATEMATICI

In questo capitolo verranno trattati i modelli e gli strumenti matematici che più saranno sfruttati in questa tesi. I morfismi e la teoria gruppale saranno necessari per lo studio del lavoro di Balzano; le frazioni continue saranno necessarie per lo studio della costruzione e dell'implementazione dei temperamenti equabili; i concetti di compattezza e di convessità saranno necessari per lo studio del lavoro della Honingh.

2.1 Morfismi e Teoria Gruppale

Definizione

La struttura algebrica (G, \circ) costituita da un insieme $G \neq \emptyset$ ed un'operazione \circ binaria¹ su G è definita gruppo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. l'operazione è associativa: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ per $\forall x, y, z \in G$;
2. $\exists e \in G | x \circ e = e \circ x = x$ (tale elemento viene definito identità in G rispetto \circ);
3. Per $\forall x \in G, \exists i \in G | x \circ i = i \circ x = e$ (tale elemento viene definito inverso di x in G rispetto \circ ; di norma, lo si indica con x^{-1} per palesare la sua dipendenza da x).

Proposizione (Unicità dell'elemento identità)

Sia (G, \circ) gruppo. Allora $\exists! e \in G | x \circ e = e \circ x = x$.

Dimostrazione: siano e_1, e_2 due elementi identità in G rispetto \circ . Dunque:

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2$$

Segue che $e_1 = e_2$.

Proposizione (Unicità dell'elemento inverso)

Sia (G, \circ) gruppo. Allora $\forall x \in G, \exists! x^{-1} \in G | x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

Dimostrazione: siano x_1^{-1}, x_2^{-1} due elementi inversi di x in G rispetto \circ . Dunque:

$$x_1^{-1} = x_1^{-1} \circ e = x_1^{-1} \circ (x \circ x_2^{-1}) = (x_1^{-1} \circ x) \circ x_2^{-1} = e \circ x_2^{-1} = x_2^{-1}$$

¹ La condizione che l'operazione sia binaria su G assicura che $\forall x, y \in G$, allora $x \circ y \in G$, per definizione stessa di operazione binaria. In alcuni casi, la condizione che l'operazione sia chiusa rispetto all'insieme viene invece posta separatamente.

Segue che $x_1^{-1} = x_2^{-1}$.

Definizione

Il gruppo (G, \circ) si definisce abeliano o commutativo se l'operazione binaria è commutativa, cioè se per $\forall x, y \in G$, allora $x \circ y = y \circ x$.

Definizione

Il gruppo (G, \circ) si definisce finito se ha un numero finito di elementi, infinito altrimenti. L'ordine di un gruppo finito è definito come $|G|$, il numero di elementi di G .

Definizione

Se $x \in G$, si definisce

$$x^n = \underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ volte}}$$

Si pone per definizione $x^0 = e$. Inoltre, x è detto di ordine finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n = e$, e se x è di ordine finito si definisce il suo ordine come il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n = e$.

Definizione

Il gruppo (G, \circ) si definisce ciclico se $\exists g \in G$ tale che $\forall x \in G$, allora $x = g^k$ per un determinato $k \in \mathbb{Z}$. In tal caso, il gruppo può essere rappresentato come:

$$\langle g \rangle = \{x \in G | x = g^k, k \in \mathbb{Z}\}$$

e viene definito come il gruppo generato da g , che a sua volta è definito generatore.

Definizione

Siano $(A, \circ), (B, *)$ gruppi. L'applicazione $f: A \rightarrow B$ tale che, $\forall a_1, a_2 \in A$ vale

$$f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) * f(a_2)$$

si definisce omomorfismo.

Definizione

Si definisce *kernel* di f l'insieme degli elementi di A il cui valore tramite f equivale all'elemento identità di B , cioè:

$$\text{Ker } f := \{a \in A | f(a) = e_B \in B\}$$

Definizione

Si definisce *immagine* di f l'insieme degli elementi di B ottenuti tramite f da elementi di A , cioè:

$$\text{Im } f := \{b \in B | b = f(a) \text{ per } a \in A\}$$

Definizione

Se una funzione f è omomorfismo e biiettiva, allora la si definisce isomorfismo. In tal caso, i gruppi A e B si dicono isomorfi, e si indica con $A \simeq B$.

Proposizione

Sia $f: A \rightarrow B$ isomorfismo. Allora $f^{-1}: B \rightarrow A$ tale che $f^{-1}f(a) = a$, $ff^{-1}(b) = b$ per $\forall a \in A, \forall b \in B$ è ancora omomorfismo.

Dimostrazione: siano $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$ tali che $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Allora:

$$f^{-1}(b_1 * b_2) = a_1 \circ a_2 = f^{-1}(b_1) \circ f^{-1}(b_2)$$

In particolare, poiché f è biiettiva, allora anche f^{-1} è biiettiva, dunque f^{-1} è isomorfismo.

Definizione

Se $f: A \rightarrow A$ è isomorfismo, allora è definita automorfismo.

Definizione

Sia $S \subset A$. Allora (S, \circ) è sottogruppo se:

1. $e \in S$;
2. $x \in S, \exists x^{-1} \in A \Rightarrow x^{-1} \in S$;
3. $x \in S, y \in S \Rightarrow x \circ y \in S$.

Definizione

Dato un sottogruppo $S = \{s_1, s_2, s_3 \dots\}$, definiamo il laterale sinistro di S come:

$$a \circ S = \{a \circ s_1, a \circ s_2, a \circ s_3 \dots\} \text{ con } a \in A$$

Analogamente il laterale destro è definito come:

$$S \circ a = \{s_1 \circ a, s_2 \circ a, s_3 \circ a \dots\} \text{ con } a \in A$$

Un sottogruppo normale è un sottogruppo i cui laterali destri e sinistri coincidono $a \circ S = S \circ a$, dunque:

$$a \circ S \circ a^{-1} = S \quad \forall a \in A$$

Proposizione

Se A è abeliano, tutti i suoi sottogruppi S sono normali.

Dimostrazione: $\forall a \in A, \forall S \subset A$ vale:

$$a \circ S \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} \circ S = S$$

Definizione

L'insieme A/S è l'insieme quoziente, definito come l'insieme di tutti i laterali del sottogruppo S .

2.2 Frazioni continue

Definizione

Si definisce frazione continua un'espressione del tipo:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Dove $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i > 1 \forall i > 0$.

Proposizione (Esistenza ed unicità dello sviluppo)

Per $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists!$ $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] | x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. Inoltre, tale sviluppo si arresta, cioè $\exists i > 0 | a_j = 0 \forall j \geq i \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione: l'esistenza e l'unicità dello sviluppo in frazione di x segue da corollario all'algoritmo euclideo² per il calcolo dell'm.c.d. tra due numeri interi.

Sia $x \in \mathbb{R}$. Possiamo scrivere $x = a_0 + x_0$ con $a_0 = [x]$ e $0 \leq x_0 < 1$. Possiamo riscrivere ora:

$$\frac{1}{x_0} = a_1 + x_1 \text{ con } a_1 = [1/x_0] \text{ e } 0 \leq x_1 < 1$$

Proseguendo:

$$\frac{1}{x_1} = a_2 + x_2 \text{ con } a_2 = [1/x_1] \text{ e } 0 \leq x_2 < 1$$

In generale avremo:

$$\frac{1}{x_{n-1}} = a_n + x_n \text{ con } a_n = [1/x_{n-1}] \text{ e } 0 \leq x_n < 1$$

E si prosegue con l'algoritmo fintanto che $x_n \neq 0$. Precisamente, $\exists \bar{n} | x_{\bar{n}} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$. Se per assurdo $\exists \bar{n} | x_{\bar{n}} = 0$ con $x \notin \mathbb{Q}$, allora x sarebbe un numero reale irrazionale con parte frazionaria finita, ma ciò è impossibile; d'altro canto, se $\nexists \bar{n} | x_{\bar{n}} = 0$ con $x \in \mathbb{Q}$, allora x non sarebbe esprimibile tramite una frazione finita, ovvero $\nexists p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $x = p/q$, il che è altresì impossibile.

Definizione

Sia $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ frazione continua. Allora il generico n -esimo coefficiente a_n è definito coefficiente parziale, e l'espressione $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ è detta convergente parziale.

² Algoritmo euclideo: siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si sottrae a da b finché non si ha $r_1 < a$. Si sottrae ora r_1 da a finché non si ha $r_2 < r_1$. Si ripete finché non si ottiene $r_{n+1} = 0$; al che, il valore r_n è il m.c.d. cercato tra a e b .

Proposizione (Approssimazione al convergente parziale)

Sia $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ frazione continua. Poniamo:

$$p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Allora sar\`a:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$$

Dimostrazione: per induzione.

Base induttiva per $n = 0, n = 1$:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

Passo induttivo: supponiamo la formula vera per $n - 1$. Allora, essendo:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = \left[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right]$$

avremo:

$$\frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + q_{n-3}} = \frac{a_n(a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

Proposizione 2.2.3 (Formula di Lagrange)

Per p_n, q_n come gi\`a definiti, vale la Formula di Lagrange:

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$

Dimostrazione: per induzione.

Base induttiva per $n = 1$:

$$q_1 p_0 - p_1 q_0 = a_1 a_0 - (a_1 a_0 + 1)1 = -1$$

Passo induttivo: supponiamo la formula vera per $n - 1$. Allora:

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = -(q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2}) = (-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

Proposizione (Stima dell'approssimazione)

Per $x \in \mathbb{R}$, p_n, q_n come già definiti, vale la stima:

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < (-1)^n \left(x - \frac{p_n}{q_n} \right) < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Dimostrazione: riprendendo la costruzione del passo induttivo della Prop. 2.2.2, scriviamo:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \left[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n + \frac{1}{r} \right] = \frac{r p_n + p_{n-1}}{r q_n + q_{n-1}}, n \geq 1$$

con $a_{n+1} \leq r < a_{n+1} + 1$. Per la Formula di Lagrange:

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{r p_n + p_{n-1}}{r q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n(r p_n + p_{n-1}) - p_n(r q_n + q_{n-1})}{q_n(r q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(r q_n + q_{n-1})}$$

Cioè:

$$(-1)^n \left(x - \frac{p_n}{q_n} \right) = \frac{1}{q_n(r q_n + q_{n-1})}$$

Sfruttando le definizioni di q_n e di r :

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \leq r q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1) q_n + q_{n-1} < q_n + q_{n-1}$$

segue che:

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n(r q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

sostituendo il valor medio abbiamo la tesi:

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < (-1)^n \left(x - \frac{p_n}{q_n} \right) < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

Definizione

Per $x \in \mathbb{R}$ con sviluppo $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, si definisce convergente lento il valore

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, i]$$

per $1 \leq i \leq a_n, n \geq 1$.

2.3 Convessità e Compattezza

Definizione

Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito convesso se, presi comunque due punti in Y , il segmento compreso tra i due punti è contenuto in Y . Ovvero, Y si definisce convesso $\stackrel{def}{\iff} \forall x, y \in Y$ il punto $t = \tau x + (1 - \tau)y \in Y$, con $0 \leq \tau \leq 1$.

Definizione

Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito convesso a stella se esiste almeno un punto appartenente ad Y tale che il segmento che va da esso ad ogni altro punto in Y è contenuto in Y . Ovvero, Y si definisce convesso a stella $\stackrel{def}{\iff} \exists x \in Y$ tale che, $\forall y \in Y$, allora $t = \tau x + (1 - \tau)y \in Y$, con $0 \leq \tau \leq 1$.

Definizione

Un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito reticolo se ogni suo elemento è combinazione lineare a coefficienti interi dei vettori che generano \mathbb{R}^n . Ovvero, sia $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ base per \mathbb{R}^n ; allora

$$Y \text{ è reticolo } \stackrel{def}{\iff} Y = \{x = \sum_{i=1}^n a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \forall i\}$$

Definizione

Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ reticolo, e $X \subseteq Y$. Allora X è definito convesso se, comunque presi due punti appartenenti ad X , i punti in Y presenti sul segmento che li congiunge stanno ancora in X . Ovvero, X si definisce convesso $\stackrel{def}{\iff} \forall x, y \in X$, se $\exists t = \tau x + (1 - \tau)y \in Y$ per $0 \leq \tau \leq 1$, allora $t \in X$.

Definizione

Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ reticolo, e $X \subseteq Y$. Allora X è definito convesso a stella se esiste almeno un punto appartenente ad X tale che i punti sul segmento che congiunge tale punto ad un altro di X , se appartengono a Y , allora appartengono anche a X . Ovvero, X si definisce convesso a stella $\stackrel{def}{\iff} \exists x$ tale che, $\forall y \in X$, se $\exists t = \tau x + (1 - \tau)y \in Y$ per $0 \leq \tau \leq 1$, allora $t \in X$.

Definizione

Sia $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme finito. Si definisce la misura di compattezza di X come:

$$C(X) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} |x_i - x_j| = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2 + \dots + (x_{in} - x_{jn})^2}$$

Definizione

Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora diremo che X è più compatto di $Y \stackrel{def}{\iff} C(X) \leq C(Y)$.

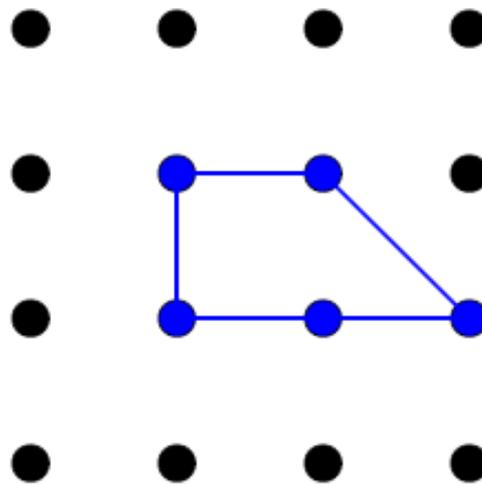


Figura 4: insieme convesso in un reticolo.

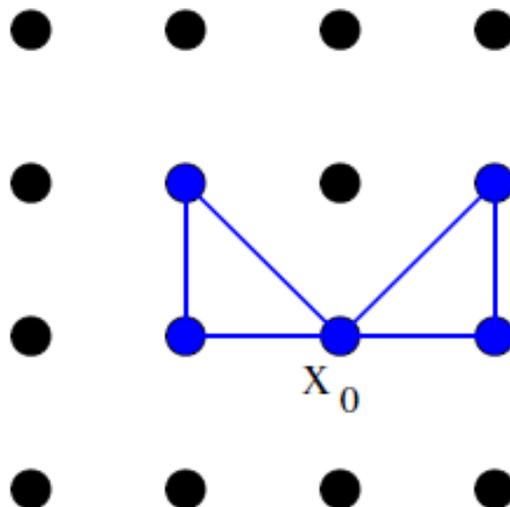


Figura 5: insieme convesso a stella di centro x_0 in un reticolo.

CAPITOLO 3: TEMPERAMENTI MUSICALI

In questo capitolo verranno introdotti i concetti di intonazione, tonalità e temperamento, si mostrerà come sono stati costruiti i primi temperamenti, punti di forza e di debolezza, e da questi ultimi si mostrerà come si è passati alla costruzione di nuovi temperamenti.

3.1 Cos'è un temperamento musicale

Per definire un temperamento musicale, si ha dapprima bisogno della nozione di intonazione musicale e di tonalità. L'intonazione è una caratteristica fondamentale del suono in funzione della sua altezza, con cui si esprime la differenza tra la sua frequenza e quella di una frequenza di riferimento. L'intonazione può essere giusta se la frequenza della nota e la frequenza di riferimento sono pari; altresì, si dice falsa se la frequenza della nota è lievemente minore (calante) o lievemente maggiore (crescente) rispetto alla frequenza di riferimento. È grazie al fenomeno dei battimenti applicati al concetto di intonazione che diventa possibile l'accordatura degli strumenti ad orecchio.

Lo scopo primario dell'intonazione è sempre stato ovviamente quello di massimizzare la consonanza armonica tra suoni in relazione (che siano presenti quindi in contemporanea o in sequenza). Tuttavia, per riuscire a costruire un sistema di suoni che tra loro siano consonanti, si tratti di un accordo o di una scala, è necessario tirare in ballo la tonalità, che, nel suo significato più ampio, si riferisce all'arrangiamento sistematico dei fenomeni sonori e delle relazioni tra le frequenze¹.

L'analisi tonale consiste nello studio delle scale e degli accordi. La musica tonale è descritta appunto in termini di scale di note, dove gli accordi sono costruiti con le note presenti nelle varie scale. In questo contesto, un accordo può essere definito consonante² quando implica una stabilità percettiva, che non necessariamente equivale al concetto di consonanza sensoriale. Un certo suono, nella musica tonale, darà all'ascoltatore l'impressione che esso sia il più stabile; la nota fondamentale di tale suono sarà allora detta tonica.

¹ Questa definizione, tuttavia, non è unica, a causa della discussione sulla sua applicabilità alle variazioni della musica a seconda della regione di provenienza; in particolare, si fa una generale distinzione tra musica occidentale e non-occidentale.

² Sulla nozione di consonanza ci si concentrerà più a fondo nel corso del prossimo capitolo.

Quando però il senso di un accordo tonico viene cambiato, si può parlare di modulazione. In questo caso, si dice che la musica ha cambiato chiave, ovvero la tonica non è più quella precedentemente considerata. D'altro canto, il cambiamento di chiave può portare al fatto che il nuovo accordo sia in dissonanza con la vecchia tonica. Il processo in cui l'accordo o la nota dissonante viene modulata in un accordo o una nota consonante è definito risoluzione.

Com'è ovvio, non si può però sfruttare il concetto di tonalità senza considerare delle scale di riferimento; solo attraverso il concetto di temperamento si possono quindi organizzare queste scale, o più in generale un insieme di suoni che diano una percezione di consonanza e armonia. Un temperamento è dunque un criterio per costruire le scale a partire da intervalli di riferimento fissati.

Si prenda in esame, come esempio di temperamento, il lavoro di Pitagora. Il temperamento pitagorico consiste nell'ottenere le note partendo dai soli intervalli di quinta e ottava, interpolando così la frequenza della tonica in questo modo:

1. Raddoppiando la frequenza si sale di un'ottava;
2. Triplicando la frequenza si sale alla quinta nell'ottava successiva.

Ovviamente la seconda regola fa uscire dall'intervallo dell'ottava che si sta considerando; ma usando la prima regola all'inverso si riesce a rientrarvi. In questo modo, partendo da una nota di frequenza f , applicando la regola 2 e poi la regola 1 all'inverso, si otterrà una nuova nota di frequenza $\frac{3}{2}f$. In effetti, il rapporto 3:2 è il rapporto che regola l'intervallo di quinta esatta. Ripetendo il processo si giungerebbe ad una frequenza $\frac{9}{4}f$, che però esce dall'ottava principale, e si dovrà quindi dimezzare di nuovo la frequenza, arrivando al valore di $\frac{9}{8}f$, che indica la frequenza della seconda (poiché 9:8 indica l'intervallo di seconda). Reiterando il procedimento, si ottiene la seguente scala, definita scala maggiore diatonica:

NOTA	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
RAPPORTO	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Gli intervalli tra note successive sono soltanto due:

1. Il tono intero: $T = 9:8 = 3^2:2^3$;
2. Il semitono diatonico: $t = 256:243 = 2^8:3^5$.

Si può generalizzare allora la scala tramite questi intervalli:

$$T - T - t - T - T - T - t$$

che si possono applicare a qualsiasi nota iniziale (tonica) anche diversa dal Do sopra citato, che ne è un caso particolare.

Come si nota, il semitono diatonico non è la metà esatta di un tono intero. Il suo complementare, il semitono cromatico t' , definito così:

$$t + t' = T$$

varrà allora:

$$t' = T - t \Rightarrow t' = \frac{3^2 \cdot 2^3}{2^8 \cdot 3^5} = 3^7 \cdot 2^{11}$$

Il sistema pitagorico si basa sul fatto che la differenza tra semitono diatonico e cromatico differiscono per molto poco, circa un nono di tono:

$$c_p = t' - t \Rightarrow c_p = \frac{3^7 \cdot 2^{11}}{2^8 \cdot 3^5} = 3^{12} \cdot 2^{19} \approx 1,013643 \dots$$

Questa piccola differenza c_p è detta comma pitagorico, su cui si tornerà più avanti in questo capitolo.

3.2 I temperamenti naturali

Come si è visto, la scala maggiore diatonica costruita con il temperamento pitagorico va a toccare intervalli di frequenze descritti da rapporti con numeri anche grandi: la settima è infatti descritta da un rapporto di 243:128, e nella scala cromatica compaiono rapporti descritti da numeri anche più grandi, come si vedrà tra poco. Rapporti costituiti da simili numeri interi corrispondono ad armonici che però non occorrono spesso nei fenomeni fisici naturali. Pertanto, si è pensato fosse conveniente introdurre nuovi rapporti a descrivere questi intervalli, di più semplice entità e dunque più frequenti anche in natura. In questo modo, si è arrivati alla costruzione dei temperamenti naturali³, e quindi ad una loro generica definizione: si definisce temperamento naturale un sistema di intervalli di frequenze che possano essere espressi tramite rapporti di numeri naturali. In particolare, una più recente definizione⁴ richiede che tali rapporti siano costituiti di numeri naturali piccoli: in questo modo, tali rapporti corrispondono ad armonici naturali più frequenti in natura. La nuova aggiunta, dunque, concilia la prima definizione, strettamente dipendente da concetti matematici, con le necessità dell'acustica.

Basandoci su questa definizione più completa, si nota dunque che il temperamento pitagorico non è un temperamento naturale. In particolare, la scala cromatica pitagorica assume i seguenti rapporti:

NOTA	RAPPORTO
Do	1:1
Do#	2187:2048
Re	9:8
Mib	32:27
Mi	81:64
Fa	4:3
Fa#	729:512
Sol	3:2
Sol#	6561:4096
La	27:16
Sib	16:9
Si	243:128
Do	2:1

³ Non è tecnicamente corretto definirli "temperamenti", ma "intonazioni"; tuttavia, per questioni di semplicità, si utilizzerà il termine "temperamento".

⁴ Forster, C. M. L. (2010), *Musical mathematics: on the art and science of acoustic instruments*, Chronicle Books.

Come già detto nel primo capitolo, fino al basso Medioevo i musicisti rimasero stabili nel seguire il temperamento pitagorico come base musicale, utilizzando accordi conclusivi contenenti solo quinte e ottave. Quando, nel Quindicesimo Secolo, si iniziarono a usare gli intervalli di terza e di sesta, essi risultavano “stonati”; Zarlino introdusse dunque i nuovi rapporti di terza (e quindi di seconda, sesta e settima) come intervalli fondamentali.

Il temperamento naturale è un sistema che consiste nel prendere un certo numero di armoniche di una nota fondamentale ν e riportarle all’ottava di partenza. Poiché gli armonici sono del tipo:

$$\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu, 5\nu, 6\nu, 7\nu, \dots, k\nu, \dots \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

si possono ottenere banalmente i rapporti:

- 1:1 per la prima, seconda, quarta, ..., 2^k -esima armonica;
- 3:2 per la terza, sesta, dodicesima, ..., $3 \cdot 2^k$ -esima armonica;
- 5:4 per la quinta, decima, ventesima, ..., $5 \cdot 2^k$ -esima armonica;
- 7:4 per la settima, quattordicesima, ..., $7 \cdot 2^k$ -esima armonica;

e così via. Grazie alle prime tre serie, si ottiene il temperamento naturale di Zarlino. Confrontando la scala naturale di Zarlino con la scala pitagorica:

NOTA	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Scala pitagorica	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
Scala di Zarlino	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1

diventa evidente che la scala di Zarlino sfrutta rapporti più semplici, e dunque più frequenti in natura e più consonanti all’orecchio.

In questo temperamento, vi sono tre intervalli possibili tra note successive, che formano una sequenza:

$$T - T' - t - T - T' - T - t$$

Questi intervalli sono:

1. Il tono maggiore $T = 9:8$;
2. Il tono minore $T' = 10:9$;
3. Il semitono diatonico $t = 16:15$.

Si può ora costruire una triade maggiore, *Do – Mi – Sol*, un accordo costituito dagli intervalli 1:1, 5:4 e 3:2. Facendo il m.c.d., tale accordo può essere visto come un unico rapporto 4:5:6; esse sono dunque armoniche successive di un'unica fondamentale.

Riprendendo i rapporti della scala naturale di Zarlino, e moltiplicandoli per il loro m.c.d., come fatto prima per la triade maggiore, si otterrà:

- Do: $24 = 2^3 \cdot 3$
- Re: $27 = 3^3$
- Mi: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- Fa: $32 = 2^5$
- Sol: $36 = 2^2 \cdot 3^2$
- La: $40 = 2^3 \cdot 5$
- Si: $45 = 3^2 \cdot 5$
- Do: $48 = 2^4 \cdot 3$

Le sette note del genere diatonico si ricavano usando i primi tre numeri primi. Sempre usando solo i numeri 2, 3 e 5, è possibile ricostruire l'intera scala cromatica di 12 note. Moltiplicando 5 a:

$$Mi = 5:4, La = 5:3, Si = 15:8 \text{ e } Re = 9:8$$

e riportando i valori ottenuti nell'ottava di partenza, si ottengono:

$$Sol\# = 25:16, Do\# = 25:24, Re\# = 75:64 \text{ e } Fa\# = 45:32$$

Infine, riapplicando ancora il processo al *Fa#* si ottiene:

$$La\# = 225/128$$

Riordinando in ordine crescente i rapporti fin qui trovati, la scala cromatica naturale di dodici toni è così formata:

$$\frac{1}{1} \frac{25}{24} \frac{9}{8} \frac{75}{64} \frac{5}{4} \frac{4}{3} \frac{45}{32} \frac{3}{2} \frac{25}{16} \frac{5}{3} \frac{225}{128} \frac{15}{8} \frac{2}{1}$$

Per il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica, è noto che ogni numero naturale può essere espresso come prodotto di potenze di fattori primi, e la rappresentazione è unica se si prescinde dall'ordine dei fattori:

$$\text{per } a \in \mathbb{N}, \text{ allora } a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \dots \cdot p_n^{e_n}$$

con p_j numero primo tale che $p_j < p_{j+1}$ e $e_j \in \mathbb{N} \forall j$. Si può allora ampliare questo risultato osservando che qualsiasi numero razionale r può essere riscritto come prodotto di potenze di numeri primi:

$$r = 2^a 3^b 5^c 7^d \dots p^n$$

con $a, b, c, d, \dots, n \in \mathbb{Z}$. Si definisce allora una scala di ordine p come un insieme di rapporti di frequenze che usi numeri razionali i cui numeratori e denominatori si fattorizzano solo per mezzo di numeri primi minori o uguali a p . È facile notare che il temperamento di Zarlino forma una scala naturale di ordine 5: ogni suo intervallo è costruito a partire dai rapporti 3:2, 5:4 e 2:1, dunque può essere descritto come:

$$\{2^m 3^n 5^o \mid m, n, o \in \mathbb{Z}\}$$

In particolare, si riscrive questa definizione in maniera da palesare la dipendenza di questo insieme dai rapporti di quinta ed ottava:

$$2^m 3^n 5^o = 2^{m+n+2o} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{5}{4}\right)^o = 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r$$

dove $m + n + 2o = p, n = q, o = r$, e dunque l'insieme sopra visto può essere espresso nella forma:

$$P_3 = \left\{ 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \mid p, q, r \in \mathbb{Z} \right\}$$

L'insieme è nominato P_3 perché per descriverlo si utilizzano soltanto i primi tre numeri primi, 2, 3 e 5 per l'appunto. In generale, si definisce P_n l'insieme degli intervalli costruiti usando i primi n numeri primi:

$$P_n = \{2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_n^{e_n} \mid e_i \in \mathbb{Z} \forall i\}$$

3.3 Spirale delle quinte, commi e scismi

Ritornando al temperamento pitagorico, Pitagora scoprì in maniera empirica che, nonostante in 7 ottave vi siano esattamente 12 quinte, dimezzando 7 volte una corda tesa si otteneva un suono diverso da quello ricavato diminuendola di un terzo per 12 volte; ovvero, la 12-esima quinta non corrisponde alla 7-ma ottava. Il motivo della dissonanza dei due suoni è presto spiegata:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129,746 \neq 128 = 2^7$$

Più in generale, è facile dimostrare che l'equazione:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y$$

non ammette soluzioni $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, se non $(x, y) = (0, 0)$, che però nel caso in questione equivale a non muoversi né di un'ottava, né di una quinta, dalla nota di partenza. Si può riscrivere l'equazione come:

$$3^x = 2^{y+x}$$

che non ammette soluzioni per x, y interi, essendo il membro a sinistra dell'uguale una potenza del 3, ed il membro alla sua destra una potenza del 2.

Che cosa comporta questa osservazione? Partendo da una nota iniziale di riferimento, si costruisce la serie delle sue quinte definendo $z_0 = 1$ la nota di riferimento e la generica n -esima quinta come:

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k r_n, \quad \text{con } 1 \leq r_n < 2, n \in \mathbb{Z}$$

dove r_n è la nota ottenuta applicando la quinta n volte alla nota iniziale z_0 , che viene poi riportata all'ottava iniziale applicando il fattore 2^k (con k che indica la differenza tra l'ottava iniziale e quella di arrivo) per dare quindi la nota z_n . Reiterando il procedimento, si costruisce così la spirale delle quinte (vedasi figura 6). Il motivo per cui la si definisce "spirale" è presto detto: essa non si richiude mai su sé stessa, ovvero, partendo da una qualsiasi nota, non si potrà mai tornare su di essa iterando il rapporto di quinta 3:2 e ritornando all'ottava di partenza dividendo per 2. Riprendendo la definizione della generica n -esima quinta z_n , facendone il logaritmo in base due, si ha:

$$n \log_2 \frac{3}{2} = k + \log_2 r_n$$

Se per assurdo la spirale fosse chiusa, esisterebbero n_1, n_2 tali che $n_1 \neq n_2, r_{n_1} = r_{n_2}$, e dunque:

$$\begin{aligned} n_1 \log_2 \frac{3}{2} - k_1 &= \log_2 r_{n_1} = \log_2 r_{n_2} = n_2 \log_2 \frac{3}{2} - k_2 \\ \Rightarrow n_1 \log_2 \frac{3}{2} - k_1 &= n_2 \log_2 \frac{3}{2} - k_2 \end{aligned}$$

da cui segue che, raccogliendo $\log_2 \frac{3}{2}$:

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{k_1 - k_2}{n_1 - n_2} = \frac{m}{n}$$

ovvero risulta essere:

$$2^{\frac{m}{n}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2^{m-n} = 3^n$$

che è impossibile.

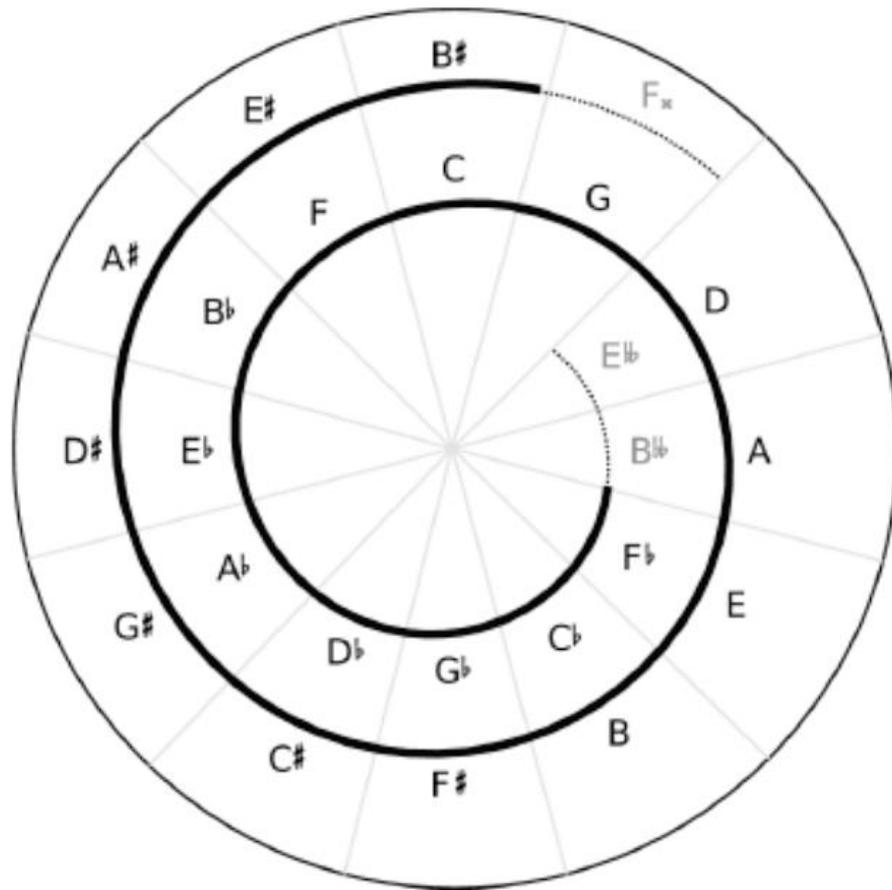


Figura 6: spirale delle quinte⁵.

Questo problema, purtroppo, non è tipico del temperamento pitagorico, né è l'unico. Ampliando il problema nell'ottica dei temperamenti naturali di ordine 3, a questo problema se ne aggiunge un altro. Confrontando la scala pitagorica con quella naturale, si trova una discrepanza tra alcuni valori corrispondenti pari a:

$$\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{27}{16} : \frac{5}{3} = \frac{243}{128} : \frac{15}{8} = \frac{81}{80} = c_s$$

⁵ Nella figura, le note sono scritte in notazione anglosassone. Le relazioni tra la notazione italiana e l'anglosassone sono: *Do* = C, *Re* = D, *Mi* = E, *Fa* = F, *Sol* = G, *La* = A, *Si* = B. Non cambiano le notazioni di diesis e bemolle.

Questo valore è definito comma sintonico, e si ritrova anche all'interno della scala naturale stessa, confrontando la quinta giusta [*Do, Sol*] con la quinta [*Re, La*] il cui rapporto vale 40:27:

$$\frac{3}{2} : \frac{40}{27} = \frac{81}{80}$$

Un comma pitagorico meno un comma sintonico viene definito scisma, ed il suo valore è:

$$s = \frac{3^{12}}{2^{19}} : \frac{81}{80} = \frac{3^8 \cdot 5}{2^{15}} = \frac{32805}{32768} \approx 1,0011 \dots$$

Ancora, osservando la scala cromatica naturale di dodici note si hanno tre quinte stonate: [*Re, La*], [*Fa#, Do#*] e [*La#, Fa*]. La prima di queste tre quinte è già stata studiata, e la seconda è regolata dallo stesso rapporto. La terza è regolata dal rapporto 1024:675, e dà vita al diascisma:

$$d = \frac{1024}{675} : \frac{3}{2} = \frac{2048}{2025} = \frac{2^{11}}{3^4 \cdot 5^2}$$

Vi si aggiunge inoltre un nuovo semitono, il semitono cromatico naturale, individuato dal rapporto 25:24. Il rapporto tra il semitono diatonico ed il semitono cromatico forma il comma enarmonico:

$$\frac{16}{15} : \frac{25}{24} = \frac{128}{125}$$

L'esistenza di questi commi e scismi, ed il fatto che le quinte costituiscono una spirale e non un circolo, sono la causa principale per cui, nella pratica di accordatura di molti strumenti, il temperamento naturale è stato per lo più abbandonato. Nell'ambito dei temperamenti naturali, non è possibile fissare i rapporti tra le frequenze senza creare leggere distorsioni (come le quinte inesatte, ad esempio). Questo dà infatti origine ai microintervalli detti comma, e alle loro combinazioni, dette scisma, tipici di ogni temperamento e delle differenze tra un temperamento e l'altro, portando la sequenze delle quinte ad essere una spirale aperta. Per evitare queste distorsioni, al fine di garantire l'esistenza di semitoni di egual entità e di rendere possibile la modulazione delle tonalità senza dover riaccordare lo strumento, è necessario dunque temperare questi microintervalli, costruendo sistemi di note in cui essi scompaiano.

3.4 I temperamenti equabili

Il processo di temperamento dei microintervalli dà vita a quelli che sono definiti i temperamenti equabili⁶. Un temperamento equabile è un sistema musicale fondato sulla suddivisione dell'ottava in intervalli tra di loro uguali. Uno dei primi studiosi ad aver descritto questo temperamento (di cui si ha notizia) fu Aristosseno di Taranto, nel IV Secolo a.C., ma per la sua compiuta teorizzazione si dovette attendere il matematico Simon Stevin, passando per Vincenzo Galilei e Giovanni Battista Benedetti.

Poiché nel temperamento equabile gli n intervalli che compongono l'ottava devono essere suddivisi in maniera uguale, allora l'ampiezza a di ogni intervallo deve valere:

$$a^n = 2:1 \Rightarrow a = \sqrt[n]{2}:1$$

che tuttavia è un valore irrazionale. Questa particolarità dei temperamenti equabili ha il vantaggio certo di avere l'ottava suddivisa in parti uguali; purtroppo, ha lo svantaggio che tali intervalli non seguono gli armonici naturali. Cercare di risolvere il problema della trasposizione equivale a risolvere il problema di far risultare le scale quanto più consonanti possibile su tutte le tonalità. Poiché l'intervallo di quinta è, dopo l'intervallo di ottava, quello più consonante, si tratta allora di valutare in quanti intervalli dovrebbe essere divisa l'ottava e come dovrebbe essere approssimato il valore dell'immagine logaritmica dell'intervallo di quinta:

$$\log_2 \frac{3}{2} \approx 0,584962500721 \dots$$

Entrano qui in gioco le frazioni continue. Infatti, si può rappresentare questo valore nella forma:

$$\log_2 \frac{3}{2} = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \dots]$$

i cui convergenti sono:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601} \dots$$

Questo significa dire che la quinta è meglio approssimata quando l'ottava è suddivisa in 1, 2, 5, 12, 41, 53, 306... intervalli. Nel temperamento a 12 semitoni, ad esempio, la quinta è approssimata al settimo intervallo. In ordine crescente di rapporto, gli intervalli più consonanti nel temperamento naturale sono:

$$\frac{1}{1} < \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

⁶ Il sistema equabile è definito a ragione "temperamento" a differenza del sistema naturale, che, come detto sopra, dovrebbe essere definito "intonazione": infatti si parla di "intonazione" quando il sistema è costituito puramente da intervalli descrivibili con rapporti di numeri interi, mentre si parla di "temperamento" quando il sistema è costituito da intervalli che approssimano un'intonazione eliminando alcuni o tutti i microintervalli.

e soddisfano le condizioni:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{1} \text{ e } \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

dunque i logaritmi in base 2 di questi valori sono combinazioni lineari di 1, $\log_2 3/2$ e $\log_2 5/4$, con coefficienti 0 o ± 1 . Inoltre, l'errore massimo di approssimazione sarà non superiore all'errore massimo tra $\log_2 3/2$ e $\log_2 5/4$. Considerando poi la rappresentazione di $\log_2 5/4$:

$$\log_2 \frac{5}{4} = [0; 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18 \dots]$$

i cui convergenti sono:

$$\frac{1}{3}, \frac{9}{28}, \frac{19}{59}, \frac{47}{146}, \frac{207}{643}, \frac{1289}{4004} \dots$$

si osserva che si può approssimare simultaneamente i due logaritmi con lo stesso denominatore, cioè 12, facendo un semplice m.c.m.:

$$\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{7}{12} \text{ e } \log_2 \frac{5}{4} \approx \frac{5}{12}$$

con un errore minore o uguale a $\max\{(3 \cdot 28)^{-1}, (12 \cdot 41)^{-1}\} = 1/84$.

Questo garantisce che dodici semitoni uguali costituiscono un buon temperamento equabile come approssimazione razionale simultanea degli intervalli di quinta e terza maggiore, e dunque dell'intera serie dei sette intervalli consonanti sopra descritti. In questo modo, si ha la certezza che tutti i microintervalli prima presenti nei temperamenti naturali (commi e scismi) sono stati annullati, e che dunque la spirale delle quinte costituisce ora un circolo delle quinte, che si richiude dopo 12 passi esatti.

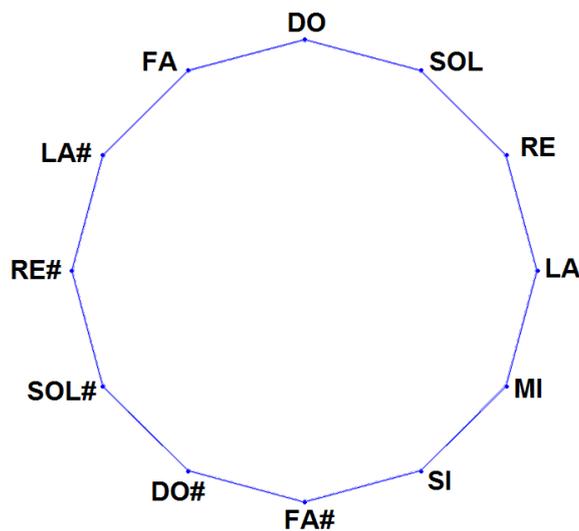


Figura 7: circolo delle quinte.

Riprendendo i convergenti di $\log_2 3/2$, sebbene sia ovvio che all'aumentare del denominatore si hanno approssimazioni sempre migliori, nella scelta del numero di semitoni in cui si dovrebbe suddividere l'ottava non si può prescindere dalle condizioni fisiche del suono scegliendo valori troppo alti. In particolare, è stato verificato⁷ che la minima differenza notevole, nonostante il suo carattere soggettivo dipendente dall'esperienza dell'ascoltatore, non si abbassa oltre i 2-3 cents⁸. Essendo 1 cent la millesima parte di un'ottava, allora 3 cent saranno $1/400$ di ottava, il che dovrebbe indurre a non considerare suddivisioni dell'ottava che richiedano più di 400 semitoni, altrimenti due semitoni successivi non sarebbero distinguibili. Inoltre, essendo stato verificato che la MDN dipende dalla frequenza del suono emesso, è anche facile verificare che il valore minimo può aumentare sensibilmente: ad esempio, ad un suono di 6000Hz corrisponde una MDN di 50Hz, che corrisponde a sua volta a un numero di cent pari a circa 14, inducendo una suddivisione dell'ottava in non più di 85 semitoni⁹.

Tuttavia è possibile scegliere intervalli diversi dalla quinta o più intervalli contemporaneamente come base per l'approssimazione dei temperamenti naturali in equabili. È notevole, però, come molti autori non abbiano dato una formale descrizione degli intervalli scelti per l'approssimazione dei temperamenti naturali in temperamenti equabili. Non solo: approssimando bene alcuni intervalli, non vi è certezza che altri intervalli possano avere un'approssimazione altrettanto buona. Nonostante ciò, per più intervalli possibili concorrenti su cui basare un temperamento equabile, alcuni autori hanno dato una maggiore rilevanza a certi intervalli piuttosto che ad altri, senza addurre particolari motivazioni alla base di tali scelte. Nel corso del prossimo capitolo saranno valutati aspetti matematici che possano dare buone motivazioni per la scelta di precisi intervalli rispetto ad altri.

⁷ Zwicker, A. & Fastl, H. (1990), *Psychoacoustics: facts and models*, 3rd edition, Springer-Verlag.

⁸ I cent sono un'unità di misura logaritmica per gli intervalli. Tale unità è definita partendo dalla convenzione che un temperamento equabile di 12 semitoni sia composto da 12 intervalli ognuno di ampiezza 100 cent; dunque, ad un'ottava corrispondono 1200 cents, ed un unico cent vale $2^{1/1200}$. Se si conosce un intervallo $a:b$, allora il numero di cents relativo all'intervallo vale: $n = 1200 \log_2(\frac{a}{b})$; viceversa, se si conosce n e si vuole risalire al rapporto iniziale: $\frac{a}{b} = r = 2^{n/1200}$: 1.

⁹ Per motivi anche computazionali, nella tesi di Honingh qui in studio verranno presi in considerazione temperamenti che dividano l'ottava fino ad un massimo di 55 semitoni.

3.5 I temperamenti ben formati

Una teoria della buona formazione delle scale musicali è stata proposta da Norman Carey e David Clampitt nel loro “*Aspects of well-formed scales*”, comparso sul *Music Theory Spectrum* (n°11/1989), pubblicato dalla University of California Press. Riprendendo la scala maggiore diatonica, formata da 7 dei 12 semitoni che compongono la scala cromatica mettendoli in ordine di toni T e semitoni t :

$$T - T - t - T - T - T - t$$

si può ottenere una progressione di quinte partendo da una qualsiasi nota. Prendendo ad esempio il Fa , si avrà che la sua sequenza delle quinte è così formata:

$$Fa - Do - Sol - Re - La - Mi - Si$$

a cui si fa corrispondere una scala ordinata:

$$Fa - Sol - La - Si - Do - Re - Mi$$

che segue l'ordine di toni e semitoni sopra descritto. Si osserva quindi che l'intervallo di quinta è utilizzato come generatore per l'insieme delle note che vengono poi riordinate in scala.

La scelta delle sette note può essere compresa in termini di simmetria rotazionale: organizzando i 7 toni in circolo, come quinte o come scala, esse hanno pari grado di simmetria rotazionale. Significa che il numero di toni compresi tra due multipli successivi del generatore è costante. Questo concetto si può formalizzare con l'utilizzo dell'aritmetica modulare. Associando la progressione delle quinte a partire dal Fa con i numeri dell'insieme $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$, si nota come la differenza tra due note consecutive (ad esempio, tra il Fa e il Do) sia pari a 1, oppure -6 , che nell'aritmetica modulare vale $-6 = 1 \pmod{7}$. Inoltre, si può creare un automorfismo che mandi la sequenza delle quinte nella scala diatonica definendo la permutazione:

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{Z}_7 &\rightarrow \mathbb{Z}_7 \\ \pi: k &\mapsto 2k \pmod{7} \end{aligned}$$

Si può allora provare a generalizzare il concetto di scala ben formata. Se $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ rappresenta N toni generati da quinte consecutive, allora gli elementi di tale classe corrispondono ai toni di una scala ben formata se esiste un automorfismo $\pi: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ che permuta i toni di \mathbb{Z}_N in ordine di scala, cioè in una sequenza $\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-1}\}$ dove $\pi_0 < \pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_{N-1}$.

Si possono desumere alcune conseguenze della scelta di avere come generatore l'intervallo di quinta studiando i convergenti lenti di $\log_2 3/2$. Essi sono:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{10}{17}, \frac{17}{29}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \dots$$

Si nota che i numeri interi che danno luogo a scale ben formate sono i denominatori dei convergenti lenti del generatore (vedasi figura 8).

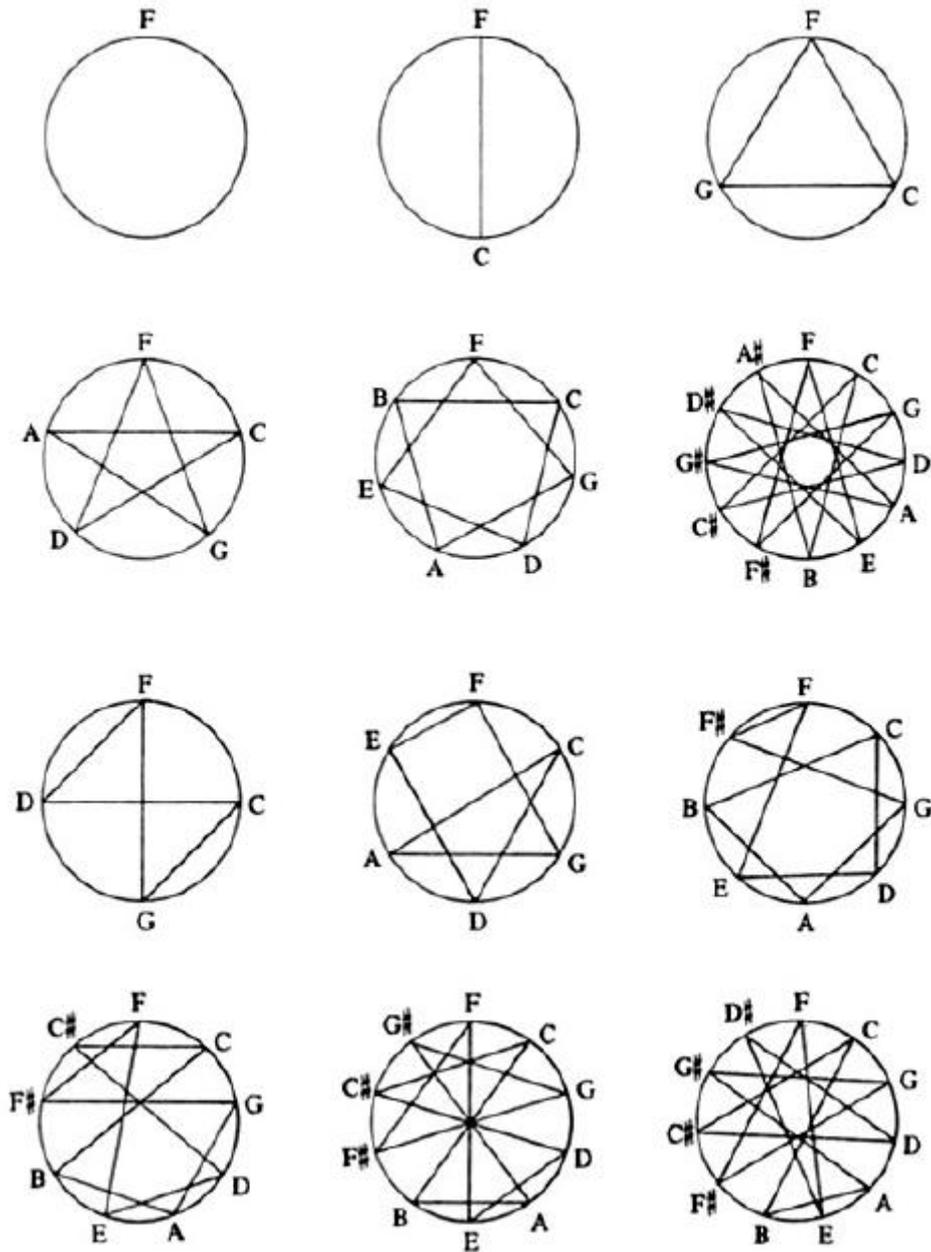


Figura 8: le scale di N note (con la quinta per generatore) ben formate sono quelle con $N = 1, 2, 3, 5, 7, 12$; non lo sono quelle con $N = 4, 6, 8, 9, 10, 11$.

Generalizzando l'esempio con un generatore g qualunque tale $2^{1/2} \leq g \leq 2$, si può costruire il temperamento pitagorico generalizzato:

$$P(g) = \{2^p g^q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$$

In questo sistema $P(g)$, una scala di N toni è ben formata se e solo se p/N è un convergente lento di $\log_2 g$, e l'automorfismo $\pi: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ che permuta i toni di \mathbb{Z}_N in ordine di scala è definito come:

$$\pi: k \mapsto qk \pmod{N}$$

con $q = (p)^{-1} \pmod{N}$.

CAPITOLO 4: CONSONANZA E DISSONANZA

Nel corso del precedente capitolo, sono stati introdotti i temperamenti equabili come sistemi con cui vengono approssimati i temperamenti naturali al fine di eliminare le distorsioni dovute alla presenza di commi e scismi. In questo capitolo, si propone un tentativo di formalizzare la scelta degli intervalli da approssimare per la costruzione dei temperamenti equabili. Il principio su cui si basa tale procedura è quello dell'intuizione musicale, che afferma come gli intervalli più importanti nella musica occidentale debbano essere quelli a più alta priorità nello studio delle approssimazioni (a cui quindi sarà data maggior attenzione nel minimizzare l'errore di approssimazione).

4.1 Consonanza e dissonanza: possibili spiegazioni

Il concetto di consonanza è stato importante fin dall'inizio degli studi sulle accordature, sui temperamenti e sui sistemi di frequenze come scale e accordi. La consonanza sensoriale si riferisce all'immediata impressione percettiva di un suono come piacevole (o spiacevole, nel caso di dissonanza). Tuttavia, è un concetto di difficile definizione, per via degli aspetti soggettivi, storici e culturali che vi sono strettamente correlati. Innanzitutto, numerose spiegazioni sono state avanzate nel corso della storia per spiegare l'esistenza della consonanza sensoriale. Pitagora ed i pitagorici avanzarono inizialmente l'ipotesi che la consonanza tra due suoni fosse dovuta al fatto che il rapporto delle frequenze fosse descritto da numeri interi piccoli; ipotesi poi ripresa anche da Galilei. In effetti, a favore di questa ipotesi sono state portate nel tempo evidenze di tipo neurologico.

D'altro canto, è chiaro che la consonanza non può essere espressa solo in questi termini perché, come si è visto, esistono fenomeni acustici dipendenti dalle frequenze che compongono il suono. Alla fine del Diciannovesimo Secolo, Carl Stumpf, nel suo "*Konsonanz und Dissonanz*", ipotizzò che la consonanza potesse essere basata sulla fusione tonale, ovvero sull'idea che, se due suoni hanno in comune un numero sufficientemente ampio di parziali, allora essi si fondono alla percezione dell'orecchio.

Un'altra idea alla base della possibile spiegazione dei fenomeni di consonanza è stata proposta da Ernst Terhardt, Gerhard Stoll e Manfred Seewan con una serie di articoli proposti sul *Journal of the Acoustical Society of America*, comparsi dagli anni Settanta in poi. In questi articoli, gli autori posero l'accento sul ruolo del *virtual pitch*: la consonanza è una esperienza percettiva positiva che sorge quando un suono non ammette ambiguità nella determinazione della sua frequenza fondamentale. Al contrario, la dissonanza è una esperienza percettiva negativa che sorge se la ricerca

della fondamentale porta a risultati ambigui (ad esempio, suoni con pochi parziali armonici, suoni con parziali inarmonici, suoni la cui sovrapposizione può produrre differenti *virtual pitch* a seconda del contesto). Questa ipotesi è strettamente legata alla teoria della periodicità di Schouten. Anche in questo caso, sono stati trovati riscontri di tipo neurologico a favore di quanto proposto dai tre autori.

Infine, Hermann Von Helmholtz , fisiologo e fisico tedesco, fu il primo ad introdurre il fenomeno dei battimenti alla base di una possibile spiegazione della consonanza. I battimenti lenti (ovvero battimenti in cui il termine modulante abbia un periodo molto lungo) sono generalmente percepiti dall'orecchio umano come piacevoli, mentre i battimenti veloci sono percepiti come spiacevoli ("rudi", come li definisce Helmholtz). La consonanza è, dunque, assenza dei battimenti. Helmholtz prevede un picco di "ruvidezza" con il valore dei battimenti a circa 32Hz. Tuttavia, per via della dipendenza della larghezza di banda critica dalle frequenze dei suoni percepiti, la previsione di Helmholtz ha subito notevoli modifiche. Più recenti esperimenti, condotti da Plomp e Levelt all'inizio degli anni Sessanta¹, hanno mostrato come intervalli consonanti ad alte frequenze possono suonare dissonanti a basse frequenze. Successivamente, altri hanno ampliato il lavoro di Plomp e Levelt^{2, 3}, e lo studio teorico ha mostrato che la consonanza degli accordi è fortemente dipendente dalla struttura degli armonici. Questo implica anche un altro fatto: poiché gli armonici di un suono ne definiscono il timbro, la consonanza dipende anche dal timbro. Di conseguenza, la consonanza non può essere indipendente dagli strumenti tipici di ogni cultura. L'esistenza stessa della grande varietà di scale e temperanti utilizzati in tutto il mondo potrebbe essere una prova che il contesto culturale gioca un ruolo chiave nella nozione di consonanza e dissonanza. Questo spiegherebbe anche il motivo per cui alcuni strumenti non sono adatti a suonare usando determinati temperamenti di altre culture, ma solo alcuni specifici sistemi vi possono essere adattati. Gli strumenti tipici della musica gamelan (un insieme di strumenti tipici indonesiani), ad esempio, sono tutti a percussione, e non producono multipli interi esatti di una data frequenza; dunque, il temperamento naturale tipico della musica occidentale non può ritenersi appropriato per questi strumenti.

¹ Plomp, R. & Levelt, W. J. (1965), *Tonal consonance and critical bandwidth*, Journal of the Acoustical Society of America.

² Kameoka, A. & Kuriyagawa, M. (1969), *Consonance Theory part I & II*, Journal of the Acoustical Society of America.

³ Sethares, W. (1993), *Local consonance and the relationship between timbre and scale*, Journal of the Acoustical Society of America.

4.2 Misure di consonanza

Come visto nella precedente sezione, non esiste tuttora una definizione univoca di consonanza. Tale nozione, e con essa quella di dissonanza, ha subito numerosi e significativi cambiamenti nel corso degli anni, e più teorie coesistono tutt'oggi. Quanto la percezione di consonanza e dissonanza sia dovuta alla percezione sensoriale diretta, e quanto essa sia invece dovuta alla mediazione dell'esperienza soggettiva, rimane un problema insoluto.

Tuttavia, la consonanza è un fattore molto importante quando si tratta della costruzione dei temperamenti equabili. Come si è visto nel precedente capitolo, nell'approssimare temperamenti naturali in equabili è prima necessario decidere quali intervalli approssimare con maggior accuratezza. Una (possibile) soluzione a questo problema viene data dal concetto di consonanza: gli intervalli più consonanti secondo la teoria musicale (quarta, quinta, terza maggiore e minore, sesta maggiore e minore) dovrebbero essere approssimati con miglior precisione. Una risposta ancor più completa comprende invece tutti gli intervalli che compaiono nella musica (occidentale). Questi intervalli possono essere scelti e raggruppati in due modi:

S_1	S_2
Ottava 2:1	Ottava 2:1
Quinta 3:2	Quinta 3:2
Quarta 4:3	Quarta 4:3
Terza maggiore 5:4	Terza maggiore 5:4
Terza minore 6:5	Terza minore 6:5
Sesta maggiore 5:3	Sesta maggiore 5:3
Sesta minore 8:5	Sesta minore 8:5
Tono maggiore 9:8	Tono maggiore 9:8
Tono minore 10:9	Settima minore 9:5
Settima maggiore 15:8	Settima minore inferiore 7:4
Settima minore 9:5	Terza sottominore 7:6
Semitono diatonico 16:15	Seconda superiore 8:7
Quarta aumentata 45:32	Quinta minore inferiore 7:5
Quinta diminuita 64:45	Terza maggiore superiore 9:7
Minore settima sottodominante 16:9	
Terza minore pitagorica 32:27	
Sesta maggiore pitagorica 27:16	
Quinta grave 40:27	
Quarta acuta 27:20	

dove in S_1 compaiono gli intervalli della scala maggiore nel temperamento naturale, ed in S_2 gli intervalli presenti nelle serie armoniche fino al nono armonico. I nomi sono presi dalla nomenclatura di Helmholtz.

Tali intervalli rappresentano i rapporti da approssimare per un temperamento equabile. Non è però chiaro come stabilire l'ordine di priorità per questi intervalli, assumendo che non siano tutti equivalenti. Stando alla definizione di temperamento naturale, segue banalmente che intervalli con rapporti semplici sono preferiti ad altri. Ad esempio, l'intervallo di quinta 3:2 sarà certamente preferito all'intervallo di quarta acuta 27:20. Ma come comparare intervalli simili come 6:5 e 7:4? Non esiste un metodo di scelta preferenziale usando solo la definizione di temperamento equabile.

Questo ha condotto alla ricerca di nuovi metodi per la scelta degli intervalli di riferimento. Numerose ipotesi e teorie sono state proposte in concomitanza con lo studio della nozione di consonanza e dissonanza. Due importanti teorie sono state formulate sui principi dei processi fisiologici e sulla prospettiva psicologica della percezione del suono; rispettivamente, quella di Helmholtz e quella di Eulero. L'idea comune a queste teorie è che gli intervalli più importanti sono quelli più consonanti e, dunque, quelli a più alta priorità di approssimazione (cioè quelli da approssimare con un errore minore). Pertanto, saranno utilizzate le seguenti formule di Eulero e di Helmholtz per creare un ordine di consonanza all'interno dei due insiemi di intervalli sopra definiti.

Eulero sviluppò una funzione Γ , chiamata "Gradus suavitatis" ("grado di dolcezza", "grado di piacevolezza"), che si applica a qualsiasi rapporto di frequenze $x:y$ dai temperamenti naturali. La funzione è definita come misura di semplicità di un rapporto. Riprendendo il Teorema fondamentale dell'aritmetica, ogni numero naturale a può essere riscritto come prodotto di primi $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, ognuno con esponente naturale e_i :

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \dots \cdot p_n^{e_n}$$

Si definisce allora la formula di Eulero come:

$$\Gamma(a) = 1 + \sum_{k=1}^n e_k(p_k - 1)$$

Nel caso di frazioni $x:y$, ridotte ai minimi termini, allora il valore è dato da:

$$\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) = \Gamma(x \cdot y)$$

Nello studio della consonanza, quanto più basso è il valore della funzione calcolata per un preciso intervallo $x:y$, tanto più consonante è l'intervallo. In accordo ai valori ottenuti dalla funzione, si possono riordinare i valori degli insiemi S_1 e S_2 in ordine di consonanza (nella tabella che segue, gli intervalli sono ordinati dall'alto verso il basso in ordine di consonanza decrescente; due valori a pari altezza sono di pari ordine).

S_1	S_2
2:1	2:1
3:2	3:2
4:3	4:3
5:4, 5:3	5:4, 5:3
6:5, 9:8, 8:5	6:5, 9:8, 8:5
16:9	7:4
10:9, 9:5, 15:8	7:6, 8:7, 9:5
16:15, 27:16	7:5, 9:7
32:27	
27:20	
45:32, 40:27	
64:45	

Si nota che l'ordine così creato non va di pari passo con l'intuizione musicale. Ad esempio, in S_1 il tono maggiore 9:8, generalmente ritenuto dissonante, è ora di pari ordine della terza minore 6:5, generalmente considerata consonante. La spiegazione sta nel fatto che la funzione di Eulero considera solo la semplicità della frazione.

Analogamente, Helmholtz definì la ruvidezza di un intervallo tra i toni p e q sulla base delle somme delle intensità $I_n + I_m$ dei battimenti associati all' n -esimo armonico di p e all' m -esimo armonico di q . Formulò quindi la sua "Funzione di ruvidezza":

$$r_p = 16B'B'' \cdot \frac{(\beta\theta\delta p)^2}{(\beta^2 + 4\pi^2\delta^2)(\theta^2 + p^2\delta^2)}$$

dove p indica il p -esimo tono parziale, β il coefficiente di smorzamento del suono, e B' e B'' sono le velocità massime delle vibrazioni che i toni inducono negli organi del Corti⁴ nell'orecchio. Invece, θ è una costante pari a 15/264, e $\delta = \frac{n_1 - n_2}{2}$, dove n_1 e n_2 sono il numero di vibrazioni in 2π secondi per i due toni uditi. Di nuovo, si possono riordinare i valori degli intervalli in S_1 e S_2 (come mostrato nella tabella della pagina seguente) seguendo l'idea che minore è il valore della funzione, maggiore è la consonanza dell'intervallo. Helmholtz stesso calcolò i valori della funzione per gli intervalli nell'ottava di riferimento C4 – C5 (un intervallo di frequenze comprese tra 263,63Hz e 523,25Hz).

⁴ Parte dell'orecchio interno; si trova all'interno della coclea. È costituito da cellule di sostegno e acustiche, che hanno il compito di tradurre l'impulso meccanico attraverso la staffa (energia cinetica) in stimolo elettrico (energia elettro-chimica). L'impulso viene quindi inviato all'area acustica della corteccia cerebrale e al lobo temporale, dove viene decodificato e il suono viene analizzato in termini frequenziali.

S_1	S_2
2:1, 3:2	2:1, 3:2
4:3	4:3
5:3	5:3
5:4	5:4
6:5, 8:5, 45:32	7:4
16:9	6:5, 8:5
27:16	7:6, 7:5, 9:5
9:5	8:7
32:27	9:8
27:20	
64:45	
9:8	
10:9	
15:8	
40:27	
16:15	

Anche qui, viene delusa l'aspettativa che l'ordine coincida con l'intuizione musicale. Intervalli conosciuti come dissonanti come la quarta aumentata 45:32 è posizionata allo stesso ordine di consonanza di intervalli solitamente ritenuti consonanti come la terza minore 6:5 e la sesta minore 8:5. Inoltre, l'intervallo di ottava e quello di quinta sono considerati dello stesso ordine di consonanza.

Per entrambe le funzioni di misura, bisogna notare come la preferenza per numeri piccoli suggerita dalla definizione del temperamento naturale non è del tutto seguita. Ad esempio, per entrambe le misure, in S_1 troviamo che il rapporto di 16:9 ha un ordine di consonanza maggiore di 9:5, altrimenti considerato più consonante per la definizione di temperamento naturale.

4.3 Misura di qualità del fit

Con le misure di consonanza di Eulero ed Helmholtz si hanno dei criteri per stabilire quali intervalli siano buoni per essere approssimati nel passaggio tra temperamento naturale ed equabile. Tuttavia, si avverte la necessità di studiare i temperamenti equabili così costruiti in funzione del numero di semitoni in cui l'ottava viene suddivisa: per quale valore, un temperamento equabile costituisce una buona approssimazione del sistema iniziale?

Un modello di qualità del fit può essere quindi sviluppato al fine di stabilire un potenziale migliore temperamento equabile nell'approssimazione dei rapporti di partenza. Numerose funzioni sono state proposte per descrivere la bontà di un dato temperamento equabile di n toni: in un contesto simile, dato un rapporto R , si dice che sia ben approssimato dal valore $2^{m/n}$ quando l'errore:

$$E(R, m, n) = \left| \log_2 R - \frac{m}{n} \right|$$

è quanto più piccolo possibile. Il numero di intervalli m in una scala di n toni che minimizzi l'errore sarà allora:

$$m = \left[n \log_2 R + \frac{1}{2} \right]$$

Sostituendo questo valore nella funzione E , questa può essere ridefinita come:

$$E(R, n) = \left| \log_2 R - \frac{1}{n} \left[n \log_2 R + \frac{1}{2} \right] \right|$$

i cui valori rientrano nell'intervallo $[0, 2n]$ (ovvero, per un fit perfetto si avrà $E = 0$, mentre l'errore massimo sarà $E = \frac{1}{2n}$). Poiché la funzione errore si applica a temperamenti equabili, necessariamente fornisce lo stesso valore per intervalli che sono l'uno l'inverso musicale dell'altro (per quinta e quarta: $E\left(\frac{3}{2}, n\right) = E\left(\frac{4}{3}, n\right)$, ad esempio). Questa funzione è già di per sé una misura di qualità del fit per un temperamento equabile di n toni: tanto più bassi i valori di $E(R, n)$, tanto migliore il fit. Per ottenere l'errore di approssimazione in cents, basta moltiplicare $E(R, n)$ per 1200.

Nuovi modelli di qualità del fit sono stati proposti a partire da rielaborazioni di questa funzione. Purtroppo, come fa notare Donald E. Hall, nell'articolo del 1988 "*Acoustical Numerology and Lucky Equal Temperaments*", tutte le misure proposte fino ad allora mostravano fit equivalentemente buoni per valori di n sufficientemente alti; ma, come descritto nel Capitolo 3, alti valori di n non possono essere generalmente accettati. Una correzione ideata fu quella di moltiplicare l'errore per il numero di toni presenti nel temperamento equabile. Hall, nello stesso articolo, proponeva la sua funzione:

$$R = \prod (-\log_2 \frac{2e_{i,j}}{S_n})$$

dove $S_n = 1200/n$ indica il più piccolo intervallo ammissibile in un temperamento di n toni, e $e_{i,j} = 1200 \cdot E(R, n)$ dove si considera $R = i/j$.

Allo stesso modo, Krantz e Douthett, nell'articolo "A Measure of The Reasonableness of Equal-Tempered Musical Scales" del 1994, proposero la seguente funzione "di desiderabilità":

$$D(R, n) = 10 - 20 \sum_{i=1}^N p_i |n \log_2 R_i - q_i|$$

dove $q_i = \left[n \log_2 R_i + \frac{1}{2} \right]$ e p_i è il peso dato ad ogni intervallo R_i con $\sum p_i = 1$.

Sulla base di questi risultati, Aline Honingh in "The Origin and Well-Formedness of Tonal Pitch Structures" propone una nuova misura di qualità del fit. Tuttavia, è riscontrabile una differenza di fondo nelle premesse di questa misura. Mentre i lavori di Hall e di Krantz e Douthett suppongono che il tasso di rigetto delle scale di n toni sia lineare in n stesso, nello studio di Honingh si ritiene che tale tasso non debba essere lineare ad n , ma possa dipendere dalle finalità delle scale. Perciò, la correzione consistente nel moltiplicare l'errore $E(R, n)$ col numero n di toni non verrà attuata.

Analogamente ai precedenti modelli, vengono introdotti dei pesi p_i da applicare agli intervalli R_i tali che $\sum p_i = 1$. In questo modo, ad intervalli più consonanti (come suggerito dalle misure di Eulero e Helmholtz) possono essere assegnati pesi maggiori rispetto ad intervalli meno consonanti. L'errore totale può ora essere costruito per ogni scala di n toni nel temperamento equabile, definita come $\sum_i p_i E(R_i, n)$.

Poiché potrebbe essere preferibile avere alti valori della funzione di misura per una migliore qualità, e viceversa bassi valori per una peggiore qualità, allora si utilizza come misura di qualità il valore $(\sum_i p_i E(R_i, n))^{-1}$. D'altro canto, questa funzione non è limitata. Dunque, un'ulteriore correzione è necessaria. L'espressione finale per la funzione di misura di qualità del fit sarà della forma:

$$f(n) = \frac{1}{0.01 + \sum_i p_i E(R_i, n)}$$

Poiché $\sum_i p_i E(R_i, n)$ è limitato nell'intervallo di valori $[0, 2n]$, allora $f(n)$ potrà variare tra 2 (approssimativamente; il peggior fit viene assunto per $n = 1$) e 100 (quando il fit è perfetto).

4.4 Considerazioni sui temperamenti risultanti

La precedente formula di qualità del fit può ora essere utilizzata per giudicare la qualità dei sistemi equabili. Per le considerazioni fatte nel Capitolo 3 sul numero di toni in cui un temperamento equabile dovrebbe essere approssimato, si restringe il dominio della funzione da \mathbb{N} a $[1, 55] \subset \mathbb{N}$ (non si considera lo 0 per ovvi motivi). Poiché è possibile effettuare una grande quantità di scelte per gli intervalli dagli insiemi S_1 e S_2 , e che esistono più modelli per il peso da assegnare ad ogni intervallo, si daranno qui solo alcuni esempi.

Considerando semplicemente la teoria musicale canonica, si prendono in esame gli intervalli di quinta 3:2, quarta 4:3, terza maggiore 5:4, terza minore 6:5, sesta maggiore 5:3 e sesta minore 8:5 come consonanti, e dunque preferibili nella scelta degli intervalli da approssimare meglio. Supponendo questi intervalli equivalenti, a cui quindi va assegnato pari peso, la funzione f assume i valori in grafico:

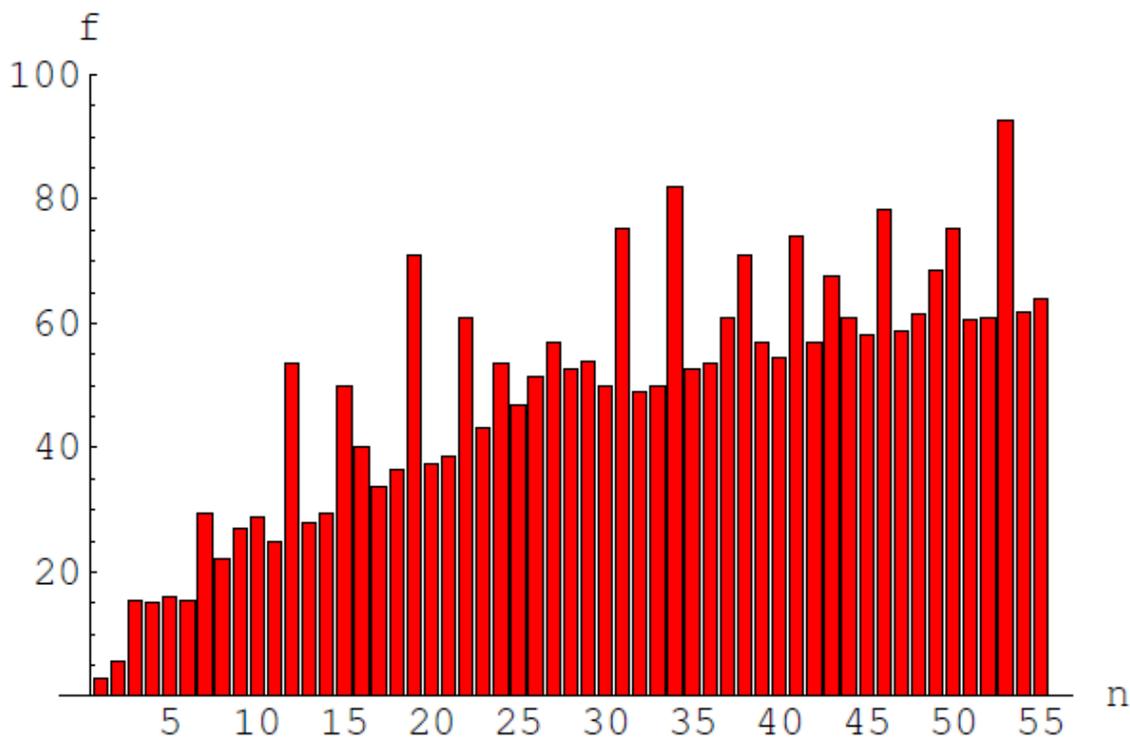


Figura 9: grafico della funzione f per gli intervalli considerati consonanti dalla teoria musicale canonica, a cui viene applicato lo stesso peso $p = 1/6$.

Osservando i valori di n che meglio approssimano i temperamenti naturali, si notano i picchi per i valori di f con $n = 12, 19, 31, 53$, risultanti anche da considerazioni già prese in esame in questo capitolo e nel precedente. Krantz e Douthett, con la funzione di desiderabilità, ottengono pressoché gli stessi risultati, a parte il picco per $n = 31$, la cui assenza è dovuta alla correzione fatta per alti valori di n . Il picco per il valore

$n = 12$ potrebbe spiegare il motivo per cui la divisione dell'ottava in 12 semitoni è oggi il temperamento equabile più utilizzato, in quanto richiede un numero di semitoni minore rispetto agli altri valori. Non di meno, anche temperamenti a 19, 31 e 53 toni sono stati utilizzati da teorici e compositori.

Scegliendo però gli intervalli dagli insiemi S_1 e S_2 , ai quali viene associato un peso in relazione ai valori ottenuti con le misure di μ , si ottengono diversi valori. Si definisce di nuovo $f: [1, 55] \rightarrow \mathbb{R}$, ed i pesi p_i relativi agli intervalli R_i inversamente proporzionali al valore delle misure di Eulero ed Helmholtz calcolate per gli intervalli in questione: minore il valore della misura, maggiore il grado di consonanza, e dunque l'intervallo risulta essere preferito rispetto ad altri. È dunque lecito assegnargli un peso più alto. Possiamo vedere i risultati della computazione nella figura:

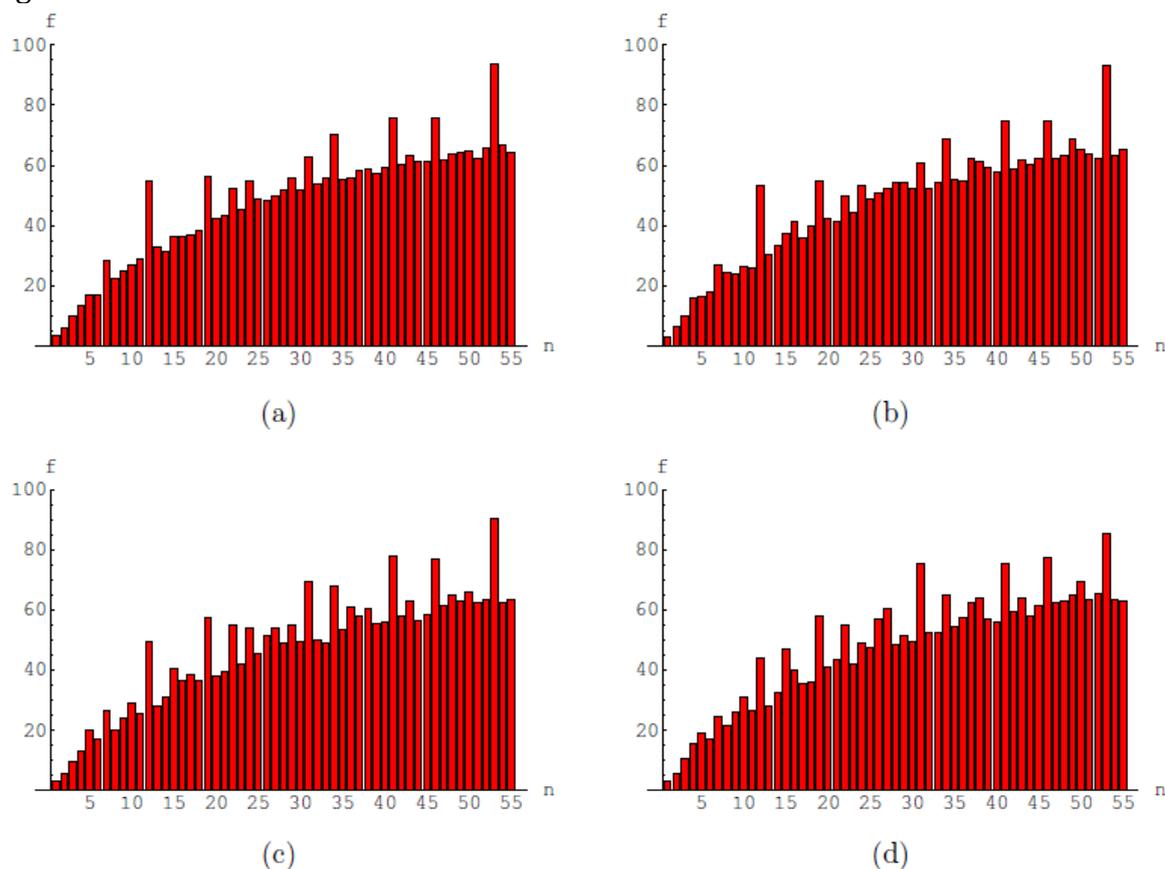


Figura 10: grafici della funzione f per intervalli e pesi diversi.

In (a) e (b) vengono studiati gli intervalli dell'insieme S_1 , in (c) e (d) gli intervalli dell'insieme S_2 ; in (a) e (c) i pesi sono definiti dalla funzione di misura di Eulero, in (b) e (d) dalla funzione di misura di Helmholtz.

Le divisioni dell'ottava che meglio approssimano temperamenti naturali in equabili sembrano dunque sussistere per $n = 12, 19, 31, 41, 53$, che compaiono in tutti e quattro i grafici. In particolare, i valori 12, 41, 53 sono significativi perché risultano durante la costruzione di temperamenti equabili per approssimazione dell'intervallo di quinta via frazioni continue. Nelle figure (a) e (b) si nota un ulteriore picco per $n = 34$, in accordo con i precedenti risultati di Krantz e Douthett. Nella

figura (d) si ci sono cinque ulteriori picchi per $n = 15, 22, 26, 27, 46$; anche la divisione dell'ottava in 15 semitoni è in accordo con i risultati di Krantz e Douthett. Al contrario, i valori di 22, 26, 27 e 46 sono in contrasto con i risultati precedenti, pur essendo valori di n che danno un valore $f(n)$ molto simile ad altri picchi; in particolare, confrontando con valori simili presenti anche in (a), (b) e (c):

$$|f(19) - f(22)| < 5, |f(19) - f(26)| < 5, |f(19) - f(27)| < 5, |f(41) - f(46)| < 5.$$

Comparando i grafici delle funzioni, si nota come (a) e (b) siano simili tra loro e dissimili con (c) e (d), a loro volta simili tra loro. Ciò implica che variare l'insieme degli intervalli di riferimento ha conseguenze molto più forti che variare la misura di consonanza. Questo è dovuto principalmente alle proprietà del modello, il quale valuta pari intervalli musicalmente inversi (come conseguenza della definizione di $E(R, n)$), anche se questi intervalli non hanno stesso ordine di consonanza.

CAPITOLO 5: ASPETTI ALGEBRICI E GEOMETRICI

In questo capitolo verrà presentata una descrizione teorica dei temperamenti naturali (in particolare di ordine 5). Si mostrerà, come anticipato nel Capitolo 3, che la descrizione insiemistica del temperamento non è unica, e che non esiste un'unica coppia di generatori alla base di tale tipologia descrittiva. Si mostreranno infine le costruzioni degli spazi geometrici.

5.1 Descrizione gruppale del temperamento naturale

Come mostrato nel Capitolo 3, ogni intervallo musicale può essere espresso, in conseguenza al Teorema Fondamentale dell'Aritmetica, come prodotto di potenze intere di numeri primi:

$$x:y = 2^a 3^b 5^c \dots p^n, \quad \text{con } x, y \in \mathbb{N}; a, b, c, \dots, n \in \mathbb{Z}$$

Così, ad esempio, l'intervallo di quinta viene rappresentato come $3:2 = 2^{-1}3^1$, e l'intervallo di settima maggiore come $15:8 = 2^{-3}3^15^1$.

Si è dunque mostrato che, fissato p_n n-esimo numero primo, allora il temperamento naturale i cui intervalli sono fattorizzabili con numeri primi $p \leq p_n$ è rappresentato dall'insieme:

$$P_n = \{2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_n^{e_n} \mid e_i \in \mathbb{Z} \forall i\}$$

Si nota dalla definizione stessa che $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P_n \subset \mathbb{Q}$.

È facile dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P_n \subset P_{n+1}$. Infatti, per qualsiasi elemento di P_n :

$$x:y \in P_n \Rightarrow x:y = 2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_n^{e_n} = 2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_n^{e_n} p_{n+1}^0, \quad e_i \in \mathbb{Z} \forall i$$

dunque $x:y \in P_{n+1}$. Più in generale, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n < m \Rightarrow P_n \subset P_m$.

L'insieme P_n forma un gruppo (P_n, \cdot) con l'operazione di moltiplicazione. Il prodotto è infatti chiuso in P_n :

$$\forall a, b \in P_n \Rightarrow a \cdot b = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} \cdot 2^{b_1} 3^{b_2} \dots p_n^{b_n}$$

che per la commutatività del prodotto e per le proprietà delle potenze, si riscrive come:

$$2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} \cdot 2^{b_1} 3^{b_2} \dots p_n^{b_n} = 2^{a_1+b_1} 3^{a_2+b_2} \dots p_n^{a_n+b_n} = 2^{c_1} 3^{c_2} \dots p_n^{c_n} = c \in P_n$$

Il prodotto è poi associativo:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in P_n \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c &= (2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} \cdot 2^{b_1} 3^{b_2} \dots p_n^{b_n}) \cdot 2^{c_1} 3^{c_2} \dots p_n^{c_n} \\ &= 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} \cdot 2^{b_1} 3^{b_2} \dots p_n^{b_n} \cdot 2^{c_1} 3^{c_2} \dots p_n^{c_n} \\ &= 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} \cdot (2^{b_1} 3^{b_2} \dots p_n^{b_n} \cdot 2^{c_1} 3^{c_2} \dots p_n^{c_n}) = a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

L'elemento identità è 1:

$$\forall a \in P_n \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

L'elemento inverso è $a^{-1} = \frac{1}{a}$:

$$\forall a \in P_n \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} \cdot \frac{1}{2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n}} = \frac{2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n}}{2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n}} = 1$$

Seguono banalmente tre proprietà:

1. (P_n, \cdot) è gruppo abeliano;
2. (P_n, \cdot) è sottogruppo di $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;
3. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n < m \Rightarrow (P_n, \cdot)$ è sottogruppo di (P_m, \cdot) .

Si dimostra inoltre che (P_n, \cdot) è isomorfo all'insieme vettoriale \mathbb{Z}^n munito dell'operazione di somma vettoriale. Sia:

$$\Phi: \mathbb{Z}^n \rightarrow P_n$$

$$\Phi: (e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto 2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_n^{e_n}$$

In primis, Φ è omomorfismo. $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ vale:

$$\begin{aligned} \Phi((a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)) &= 2^{a_1+b_1} 3^{a_2+b_2} \dots p_n^{a_n+b_n} \\ &= 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} \cdot 2^{b_1} 3^{b_2} \dots p_n^{b_n} = \Phi((a_1, a_2, \dots, a_n)) \cdot \Phi((b_1, b_2, \dots, b_n)) \end{aligned}$$

Si dimostra che Φ è iniettiva sfruttando il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica. Infatti:

$$\begin{aligned} \Phi((a_1, a_2, \dots, a_n)) = \Phi((b_1, b_2, \dots, b_n)) &\Leftrightarrow 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n} = 2^{b_1} 3^{b_2} \dots p_n^{b_n} \\ &\Leftrightarrow 2^{a_1-b_1} 3^{a_2-b_2} \dots p_n^{a_n-b_n} = 1 \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{aligned}$$

per l'unicità di rappresentazione di 1.

Si dimostra infine che Φ è suriettiva (e quindi biiettiva) sfruttando la stessa definizione di P_n . Qualsiasi elemento di P_n è definito come $2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_n^{e_n}$ con $e_i \in \mathbb{Z} \forall i$. Perciò, esiste sempre un elemento $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$ tale che $\Phi((e_1, e_2, \dots, e_n)) = 2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_n^{e_n}$.

Anche $\Phi^{-1}: P_n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ è isomorfismo.

Come si è visto nel corso del Capitolo 3, l'insieme P_3 può essere riscritto come:

$$P_3 = \left\{ 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \mid p, q, r \in \mathbb{Z} \right\}$$

e può, per quanto dimostrato, essere messo in relazione con \mathbb{Z}^3 tramite l'isomorfismo:

$$\Phi: (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \leftrightarrow 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \in P_3$$

In questo modo, si può interpretare un temperamento di ordine 5 come uno spazio geometrico tridimensionale; in particolare, come reticolo sottoinsieme di \mathbb{R}^3 . Per semplificare, tuttavia, si possono considerare soltanto i valori di P_3 che stanno nell'intervallo d'ottava, cioè in $[1, 2[$. Si definisce allora:

$$\begin{aligned} \varphi: P_3 &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \varphi: 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r &\mapsto (q, r) \end{aligned}$$

L'applicazione è un omomorfismo, ma non è ovviamente biiettiva. In particolare non è iniettiva:

$$\varphi \left(2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \right) = (q, r), \quad \varphi \left(2^m \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \right) = (q, r), \quad \text{per } p \neq m$$

dunque non può essere un omomorfismo.

Questa applicazione suddivide P_3 in classi d'equivalenza. Si nota che:

$$\text{Ker}\varphi = \{2^p \mid p \in \mathbb{Z}\} = P_1$$

dove, infatti, gli elementi 2^p sono quelli proiettati in $(0, 0)$ tramite l'applicazione. Si definisce allora il gruppo quoziente:

$$\hat{P}_3 = \frac{P_3}{P_1} = \{xP_1 \mid x \in P_3\}$$

che è anche il gruppo dei laterali di P_1 . Ogni suo elemento sarà una classe d'equivalenza degli elementi $\left\{2^\alpha \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \mid q, r \text{ fissati e } \alpha \in \mathbb{Z}\right\}$. Da ogni laterale si potrà allora scegliere un elemento che giace nell'intervallo d'ottava $[1, 2[$.

Tramite questa nuova costruzione, φ diventa biiettiva per valori da \hat{P}_3 in \mathbb{Z}^2 . Dunque diventa anche isomorfismo (poiché $P_1 = \text{Ker}\varphi$), ed in particolare si avrà:

$$\hat{P}_3 = \frac{P_3}{P_1} \cong \mathbb{Z}^2$$

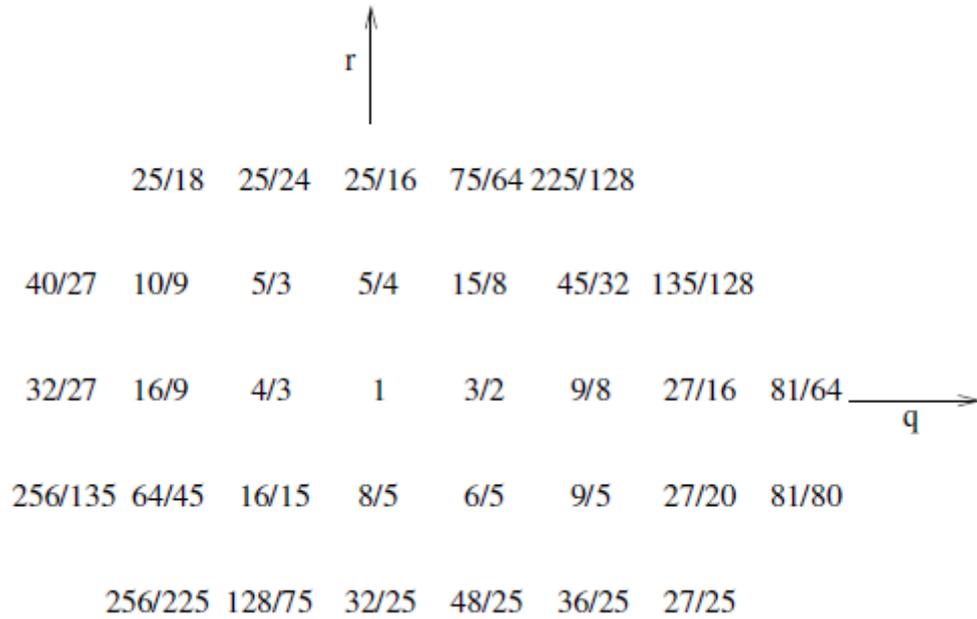


Figura 11: reticolo costruito secondo la proiezione $\varphi: 2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r \mapsto (q, r)$.

Questo reticolo è definito “Reticolo di Eulero”, ed è illimitato. Si noti che, per $r = 0$, sull'asse q possono ritrovarsi i rappresentanti del gruppo $\hat{P}_2 = \frac{P_2}{P_1}$. Questo reticolo può essere costruito come combinazione lineare di quinte e terze maggiori (poi eventualmente ritrasposte all'ottava iniziale). L'asse q rappresenta le quinte, l'asse r rappresenta le terze maggiori. Inoltre, l'inverso di ogni intervallo giace opposto al centro 1, che è quindi il punto di simmetria.

Esistono modi diversi per creare un omomorfismo tra P_3 e \mathbb{Z}^2 . Il gruppo \mathbb{Z}^2 ha come generatori gli elementi $(1,0)$ e $(0,1)$, che sono gli elementi associati a $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{4}$ nella proiezione fin qui vista.

Questi intervalli non sono però unici. Si possono infatti riscrivere come:

$$2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{5}{4}\right)^r = 2^{u+v+2w} \left(\frac{3}{2}\right)^v \left(\frac{5}{4}\right)^w = 2^u 3^v 5^w = 2^{u+v+2w} \left(\frac{5}{4}\right)^{v+w} \left(\frac{6}{5}\right)^v = 2^l \left(\frac{5}{4}\right)^m \left(\frac{6}{5}\right)^n$$

con $l, m, n, p, q, r, u, v, w \in \mathbb{Z}$. Questo significa dire che il temperamento naturale di ordine 5 costituito dalla combinazione di ottava, quinta e terza maggiore è equivalente a quello costituito dalla combinazione di ottava, terza maggiore e terza minore, come studiano da Gerald Balzano. In particolare, nell'intervallo di ottava $[1, 2[$ è sufficiente considerare gli ultimi due intervalli dei tre citati nelle due costruzioni proposte.

Esistono, ovviamente, altre coppie di intervalli in P_3 che possano fungere da generatori. Se l'omomorfismo, da P_3 in \mathbb{Z}^2 è dato come $2^p a^q b^r \mapsto (q, r)$, allora gli elementi generatori a e b di P_3 corrisponderanno al sottoinsieme di generatori $\{(1,0), (0,1)\}$ di \mathbb{Z}^2 . Dunque, il problema di trovare i possibili generatori di P_3 equivale al problema di trovare una caratterizzazione per i generatori di \mathbb{Z}^2 . Siano allora due elementi di \mathbb{Z}^2 :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

essi saranno base per $\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm 1$

Per semplicità, si userà:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$$

Si assuma inizialmente che $\det(A) = \pm 1$. Poiché A ha determinante non nullo, allora ammette matrice inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$ con $e, f, g, h \in \mathbb{Z}$, per come essa è determinata. Dunque:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare:

$$e \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$g \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$$

Se e_1, e_2 possono essere visti come generati da $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, ne consegue che $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$ è base per \mathbb{Z}^2 .

D'altro canto, si supponga $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$ base per \mathbb{Z}^2 . Allora esistono $e, f, g, h \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

ma allora si avrà:

$$\begin{aligned} (e_1 \ e_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = AA^{-1} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A) \det(A^{-1}) \\ &= (ad - bc)(eh - fg) = 1 \end{aligned}$$

Poiché ogni elemento di A e A^{-1} è intero, allora anche $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Dunque, gli unici valori plausibili per cui è soddisfatta la condizione $\det(A) \det(A^{-1}) = 1$ sono:

$$\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1$$

5.2 Realizzazione e descrizione geometrica dei temperamenti

Esistono dunque infinite coppie di vettori che possono fungere da base per \mathbb{Z}^2 , e dunque altrettante coppie di intervalli possono essere scelte per costruire dei temperamenti naturali di ordine 5. Nella figura 11, il reticolo è costruito scegliendo gli intervalli di quinta e di terza maggiore (identificando gli poi intervalli di ottava, così da considerare il reticolo bidimensionale isomorfo a \mathbb{Z}^2). Si è visto però che si può costruire un reticolo isomorfo usando come generatori gli intervalli di terza maggiore e terza minore, meglio conosciuto col nome di “Spazio delle terze di Balzano”, considerando la nuova proiezione:

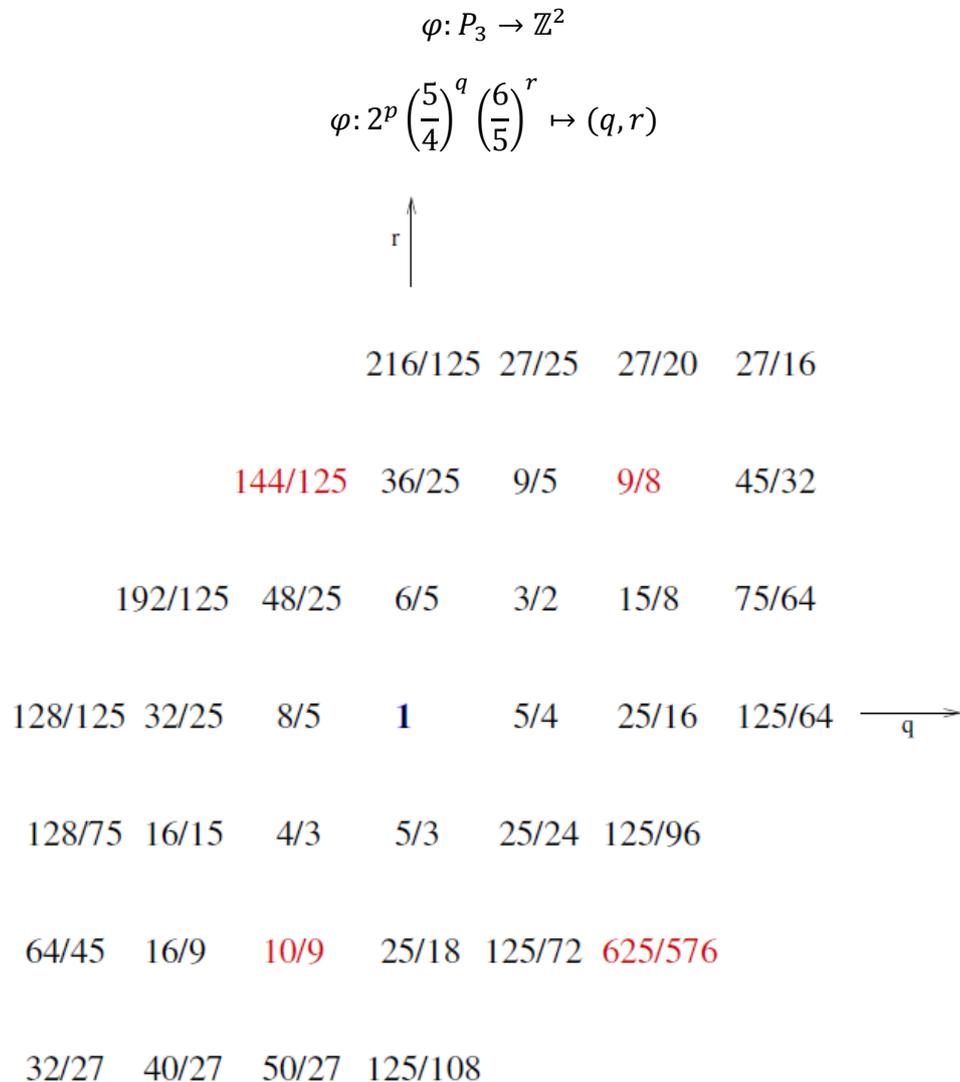


Figura 12: realizzazione parziale dello “Spazio delle terze di Balzano”.

Nella figura 12 è visualizzata una parte dello spazio delle terze di Balzano. Ogni intervallo è costruito come combinazione di $\frac{5}{4}$ e $\frac{6}{5}$. Assumendo di assegnare il *Do* all'intervallo unisono, allora lo spazio delle terze è correlato allo spazio dei nomi delle note così formato:

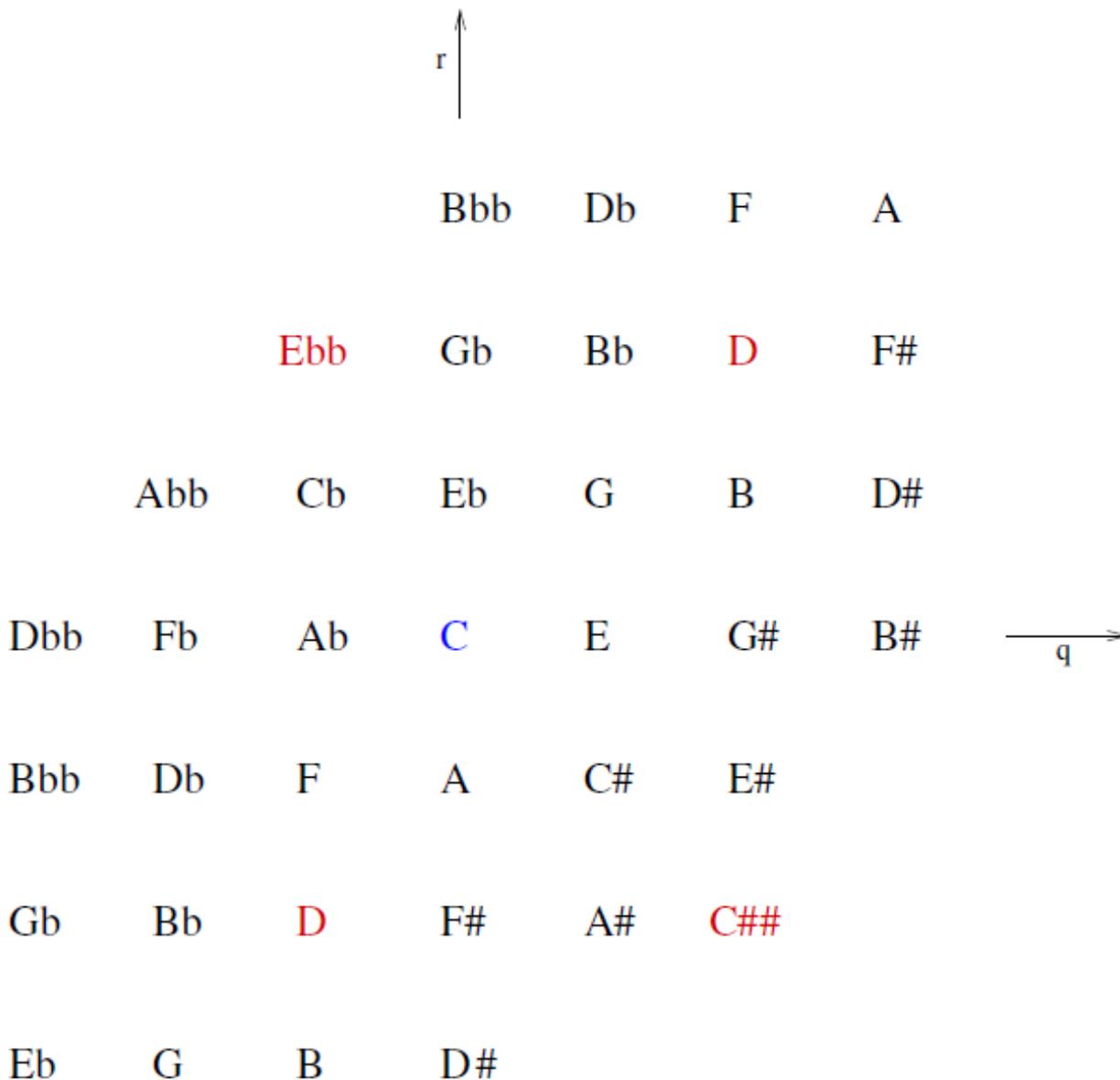


Figura 13: realizzazione parziale dei nomi delle note a partire dallo spazio delle terze.

Una volta associato l'intervallo unisono al *Do* (*C*), alla terza maggiore si associa il *Mi* (*E*), mentre alla terza minore il semitono precedente, il *Mib* (*Eb*). In blu è evidenziato l'intervallo unisono 1:1 associato al *Do*. Volendo confrontare il *Re* (10:9) (in basso a sinistra in rosso) ed il *Re* (9:8) in alto a destra, si nota che la differenza è pari a $\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80}$, un comma sintonico. Questo fatto suggerisce due osservazioni:

1. Muovendosi da una nota di tre terze maggiori verso destra e salendo ancora di quattro terze maggiori (e ridiscendendo poi per due ottave), si arriva ad una frequenza che differisce all'originale per un comma sintonico;
2. A due note che hanno lo stesso nome sono associate frequenze che differiscono per uno o più comma sintonici.

Analogamente, si possono calcolare le differenze (in cents): $Re(9:8) - C\#\#(625:576) = Ebb(144:125) - Re(10:9) \approx 62,57$ cents, detto "il maggior diesis"; $Re(9:8) - Ebb(144:125) = C\#\#(625:576) - Re(10:9) \approx 41,06$ cents, detto "il minor diesis"; $Ebb(144:125) - C\#\#(625:576) = 103,62$ cents, un valore maggiore a quello del semitono equabile. Un'osservazione importante da fare in conseguenza a queste discrepanze è che, evidentemente, il sistema (occidentale) di nomenclatura delle note non è sufficientemente ampio per descrivere e distinguere tutte le possibili frequenze del temperamento naturale di ordine 5.

Si può dunque pensare di sostituire al temperamento naturale il temperamento equabile nella costruzione dello spazio geometrico. Si associa ad un intervallo di frequenze in temperamento naturale l'equivalente temperato (eliminando quindi i commi), e a tale intervallo si associa un valore in notazione MIDI¹ tale che l'intervallo unisono equivalga allo 0.

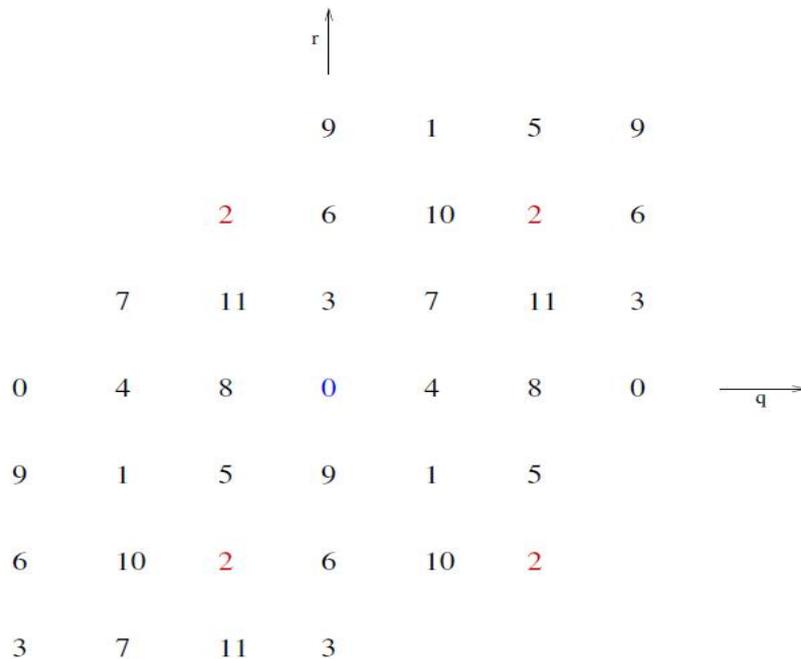


Figura 14: realizzazione parziale della numerazione MIDI delle note.

¹ Il MIDI è un protocollo standard per l'interazione di strumenti musicali elettronici, compresa l'interazione con un computer. La notazione MIDI prevede che al Do_4 centrale, il Do_4 in notazione scientifica, sia associato il valore di 60, e che il range totale di valori da coprire vada da 0 a 127. La nota più bassa (associata allo 0) sarà allora il Do_{-1} , mentre la nota più alta (associata al 127) sarà il Sol_9 .

Avendo una suddivisione dell'ottava in 12 semitoni, gli intervalli ed i numeri della notazione MIDI sono associati in questo modo:

NUMERAZIONE MIDI	INTERVALLO
0	Unisono
1	Seconda minore
2	Seconda maggiore
3	Terza minore
4	Terza maggiore
5	Quarta
6	Tritono
7	Quinta
8	Sesta minore
9	Sesta maggiore
10	Settima minore
11	Settima maggiore

Il piano delle note MIDI, quindi, può essere generato dai valori 3 e 4. D'altro canto, i valori presenti nel piano possono essere rappresentati da \mathbb{Z}_{12} , che forma un gruppo ciclico con l'operazione di addizione. Si dimostra allora che esiste un isomorfismo tra $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ e $(C_3 \times C_4, \circ)$, dove $C_3 = \langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$ (accordo di settima minore, costruito a partire dalla terza minore) e $C_4 = \langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\}$ (triade aumentata, costruita a partire dalla terza maggiore) sono sottoinsiemi di \mathbb{Z}_{12} stesso, e \circ è definita come:

$$(l, m) \circ (l', m') = (l + l'(\text{mod}12), m + m'(\text{mod}12))$$

In particolare, questo gruppo ha elemento unitario $(0,0)$, e l'inverso di (l, m) vale $(12 - l, 12 - m)$. Sia dunque:

$$f: C_3 \times C_4 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

$$f: (l, m) \mapsto p = l + m (\text{mod}12)$$

si dimostra che f è un omomorfismo:

$$\begin{aligned} f((l, m) \circ (l', m') (\text{mod}12)) &= f((l + l' (\text{mod}12), m + m' (\text{mod}12))) \\ &= (l + l') + (m + m') (\text{mod}12) = (l + m) + (l' + m') (\text{mod}12) \\ &= f((l, m)) + f((l', m')) \end{aligned}$$

Si dimostra che f è iniettiva:

$$f((l, m)) = f((l', m')) \Rightarrow (l + m) = (l' + m') \pmod{12} \Rightarrow (l - l') + (m - m') = 0 \pmod{12}$$

definiamo $l - l' = \tilde{l} \in C_3$ e $m - m' = \tilde{m} \in C_4$. Dunque $\tilde{l} + \tilde{m} = 0 \pmod{12} \Leftrightarrow \tilde{l} = 0 \pmod{12}$, $\tilde{m} = 0 \pmod{12}$, poiché non esiste combinazione lineare di elementi non nulli di C_3 e C_4 che valga $0 \pmod{12}$. Segue dunque che:

$$\tilde{l} = l - l' = 0 \pmod{12} \Leftrightarrow l = l' \text{ (poiché } l, l' < 12)$$

$$\tilde{m} = m - m' = 0 \pmod{12} \Leftrightarrow m = m' \text{ (poiché } m, m' < 12)$$

e dunque si può concludere che $f((l, m)) = f((l', m')) \Rightarrow (l, m) = (l', m')$

Si dimostra infine che f è suriettiva. $\forall (l, m) \in C_3 \times C_4 \Rightarrow f((l, m)) = l + m \pmod{12} = 3x + 4y \pmod{12}$ con $x = 0, 1, 2, 3$ e $y = 0, 1, 2$. Si ha che $3x + 4y = 1 \pmod{12}$ per $x = 3$ e $y = 1$. Poiché $\mathbb{Z}_{12} = \langle 1 \rangle$, $\forall k \in \mathbb{Z}_{12}$ si ha:

$$k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k \text{ volte}} = \underbrace{(3x + 4y) + (3x + 4y) + \dots + (3x + 4y)}_{k \text{ volte}} \pmod{12} \\ = k(3x + 4y) = k(3x) + k(4y) \pmod{12} = kl + km \pmod{12}$$

con $kl \pmod{12} = \bar{l} \in C_3$, $km \pmod{12} = \bar{m} \in C_4^2$. Quindi $\forall k \in \mathbb{Z}_{12}, \exists (\bar{l}, \bar{m}) \in C_3 \times C_4$ tale che $f((\bar{l}, \bar{m})) = k$.

Dunque f è isomorfismo e $(\mathbb{Z}_{12}, +) \cong (C_3 \times C_4, \circ)$. Questo significa che ogni elemento di \mathbb{Z}_{12} può essere riscritto in termini di terze maggiori e minori. Pertanto, si può rappresentare $C_3 \times C_4$ come un reticolo bidimensionale, con le terze maggiori sull'asse x e le terze minori sull'asse y . Il reticolo così costituito può essere perfettamente sovrapposto al reticolo di assi q, r della figura 14. I 12 toni temperati $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ possono essere ritrovati in un rettangolo 3×4 , e questo rettangolo si ripete in ogni direzione (vedasi figura 15, rettangolo in nero). I semitoni sono ordinati nelle rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, stando alla relazione $y = -x + c$, con c costante intera; analogamente, il circolo delle quinte si trova sulle rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante, sottostando alla relazione $y = x + c$. Poiché i rapporti di terza maggiore e minore corrispondono agli archi, è facile ritrovare le triadi maggiori e minori: date due rette d'equazione $r_c: y = x + c$ e $r_d: y = x + d$ dove $d - c = 1$, e date le intersezioni delle due rette con le rette parallele all'asse y di equazione $x = k$ al variare di k in \mathbb{Z} , i triangoli così formati costituiranno una triade maggiore se l'ipotenusa giace su r_d , o

² Infatti $kl = k(3x) = 3(kx)$. Ora, kx può essere visto come un multiplo q -esimo di 4 con resto r compreso tra 0 e 3; dunque: $3(kx) = 3(4q + r) = 12q + 3r = 3r \pmod{12}$, ma i valori possibili di $3r$ sono 0, 3, 6, 9 al variare di r , e dunque $kl \pmod{12} = \bar{l} \in C_3$. Con ragionamento analogo si dimostra che $km \pmod{12} = \bar{m} \in C_4$

una triade minore se l'ipotenusa giace su r_c (vedasi figura 15, triangoli in azzurro). Unendo due triadi maggiori e tre triadi minori si ottiene la scala diatonica $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$, che, ricordando la corrispondenza $Do = 0$, diventa semplicemente la scala maggiore di $Do: Do - Re - Mi - Fa - Sol - La - Si$. La scala, mostrata in figura 15, è visualizzata come una regione convessa e compatta.

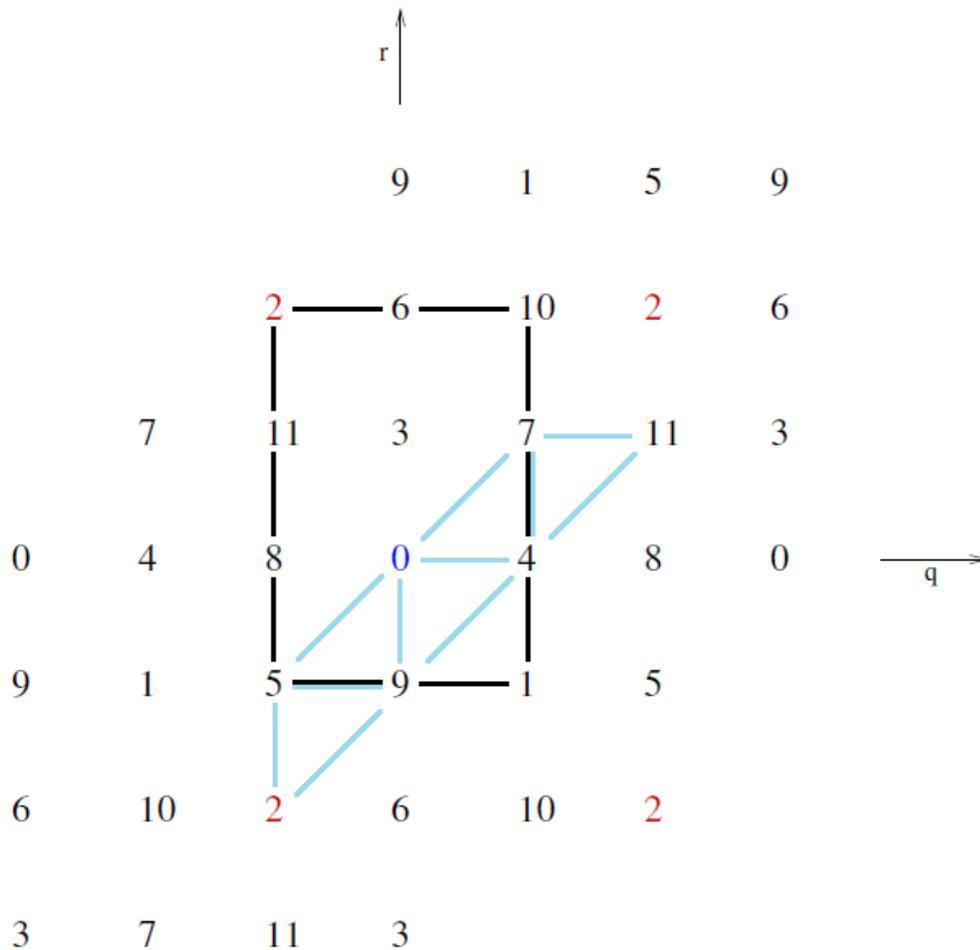


Figura 15: rettangolo dei 12 toni temperati e scala diatonica.

Volendo generalizzare il discorso a temperamenti equabili ad n toni, Balzano dimostra che i gruppi \mathbb{Z}_n in cui si mantengono le proprietà di \mathbb{Z}_{12} sono quelli tali che:

$$\mathbb{Z}_n \cong C_k \times C_{k+1}, \quad \text{per } n = k(k+1), k \in \mathbb{N}$$

e la scala diatonica contenuta in questo spazio è composta di $2k + 1$ note.

Si può dunque pensare di utilizzare questa nuova condizione come un alternativo punto di partenza per la costruzione di temperamenti equabili.

Secondo questo principio, buone approssimazioni del temperamento naturale in equabile sarebbero fornite da temperamenti di 12, 20, 30, 42, ... toni³.

Le figure 10, 11 e 12 mostrano tre diverse costruzioni dello stesso spazio delle terze. Lo spazio delle terze di Bolzano può essere esteso illimitatamente in verticale (sommando o sottraendo intervalli di terza minore) e in orizzontale (sommando o sottraendo intervalli di terza maggiore). Nello spazio dei nomi delle note si possono identificare elementi corrispondenti in una direzione, generando così un cilindro (vedasi figura 16), mentre nello spazio della numerazione MIDI si possono identificare elementi corrispondenti in due direzioni, generando così un toro (vedasi figura 17).

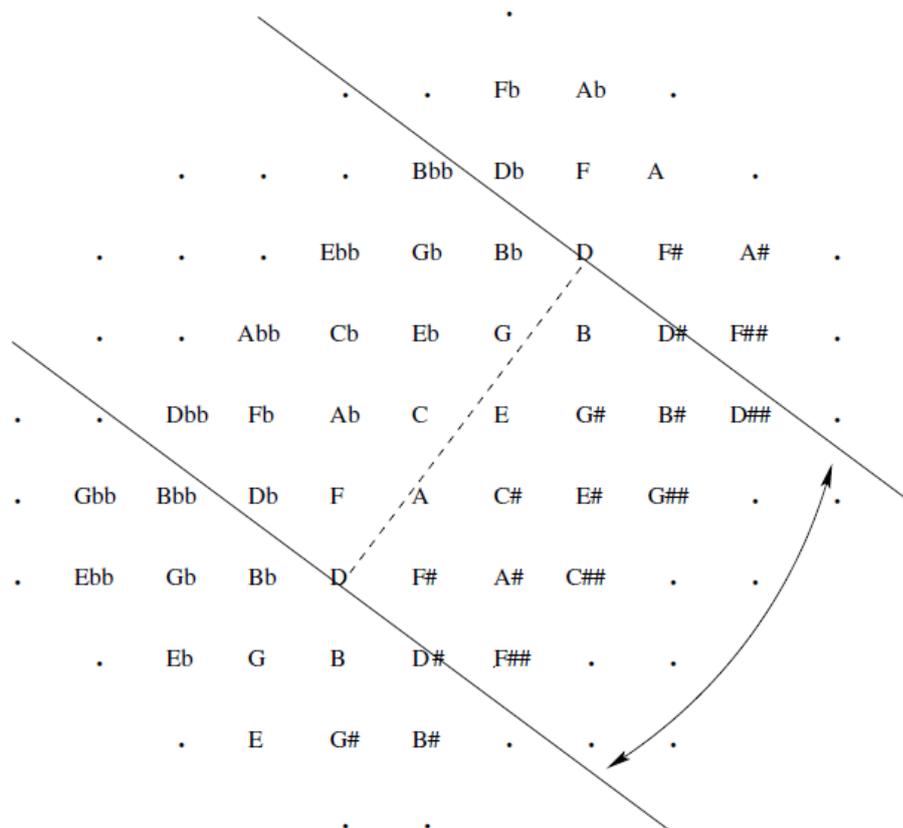


Figura 16: identificazione degli elementi corrispondenti come base per la costruzione del cilindro.

³ Tuttavia, la condizione sulle scale non è sempre rispettata. Ad esempio in sistemi di divisione dell'ottava in 20 semitoni, si dovrebbe avere $n = 20 = 4(4 + 1)$, e dunque scale di $2 \cdot 4 + 1 = 9$ note, come proposto da Balzano. Invece, Paul Zweifel, nell'articolo "Generalized diatonic and pentatonic scales: a group-theoretic approach", mostra come scale ad 11 note possano essere preferite a quelle a 9 note.

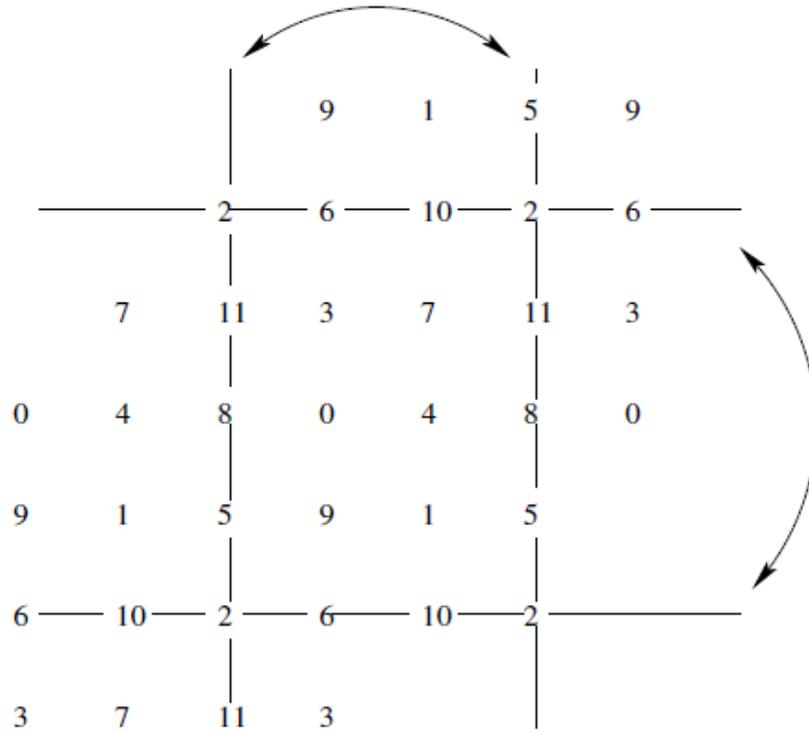


Figura 17: identificazione degli elementi corrispondenti come base per la costruzione del toro.

CAPITOLO 6: CONVESSITÀ, COMPATTEZZA E CONSONANZA

L'idea di studiare i temperamenti come spazi geometrici, proposta da Balzano e rielaborata da Honingh, ha dato luogo all'ipotesi che alla base della percezione dei suoni come consonanti o dissonanti ci possano essere delle proprietà geometriche delle strutture musicali. In questo capitolo, si studieranno le relazioni tra le proprietà di convessità e di compattezza e le misure di consonanza in insiemi contenuti negli spazi descritti nel Capitolo 5 (in particolare, accordi in isolamento).

6.1 Convessità e sollevabilità convessa

La definizione di un insieme discreto convesso si applica agli insiemi nello spazio degli intervalli di frequenze costruito con gli elementi di \hat{P}_3 della figura 12 (come definito nel Capitolo 2). D'altro canto, si è precedentemente visto che quello spazio può essere ricostruito con una base diversa; è d'uopo, dunque, considerare se, data T applicazione lineare di cambiamento di base, la proprietà di convessità (a stella, eventualmente) sia T -invariante per i reticoli. Siano dunque x ed y due punti appartenenti ad un insieme convesso X in un reticolo; allora un generico segmento che colleghi i due punti sarà della forma $\alpha x + (1 - \alpha)y$, con $\alpha \in \{0, n_1, n_2, \dots, n_k, 1\}$, dove n_i rappresenta la frazione di segmento dove giace l' i -esima intersezione del segmento con un punto del reticolo. Per $x, y \in X$, si avrà che $T(x), T(y) \in T(X)$. Tramite il cambiamento di base si avrà che il segmento rimane ancora tale:

$$T(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha T(x) + (1 - \alpha)T(y)$$

e dunque ogni segmento contenuto in X è ancora un segmento contenuto in $T(X)$, che risulta perciò convesso.

Anche l'area dell'insieme convesso in un reticolo è T -invariante se si aggiunge l'ipotesi che T sia una trasformazione di basi la cui matrice associata abbia determinate pari a ± 1 . Ogni insieme può essere scomposto in triangoli, dunque la proposizione precedente segue immediatamente dal fatto che la misura di un triangolo sia T -invariante.

Si osserva che un generico triangolo ABC di coordinate $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ ha un'area pari a:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$$

Se a T si associa una matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tale che $ad - bc = \pm 1$, allora i nuovi punti avranno coordinate:

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_i + cy_i \\ bx_i + dy_i \end{pmatrix}$$

Sostituendo i valori nella formula del calcolo dell'area del triangolo, si ha che $A_{T(ABC)} = A_{ABC}$.

Tuttavia, la proprietà di convessità nello spazio delle frequenze non si conserva necessariamente passando allo spazio dei nomi delle note. Si supponga di creare uno spazio isomorfo allo spazio delle terze, in cui i generatori siano l'intervallo di quinta 3:2 ed il comma sintonico 81:80. Il relativo spazio dei nomi delle note sarà dunque della forma:

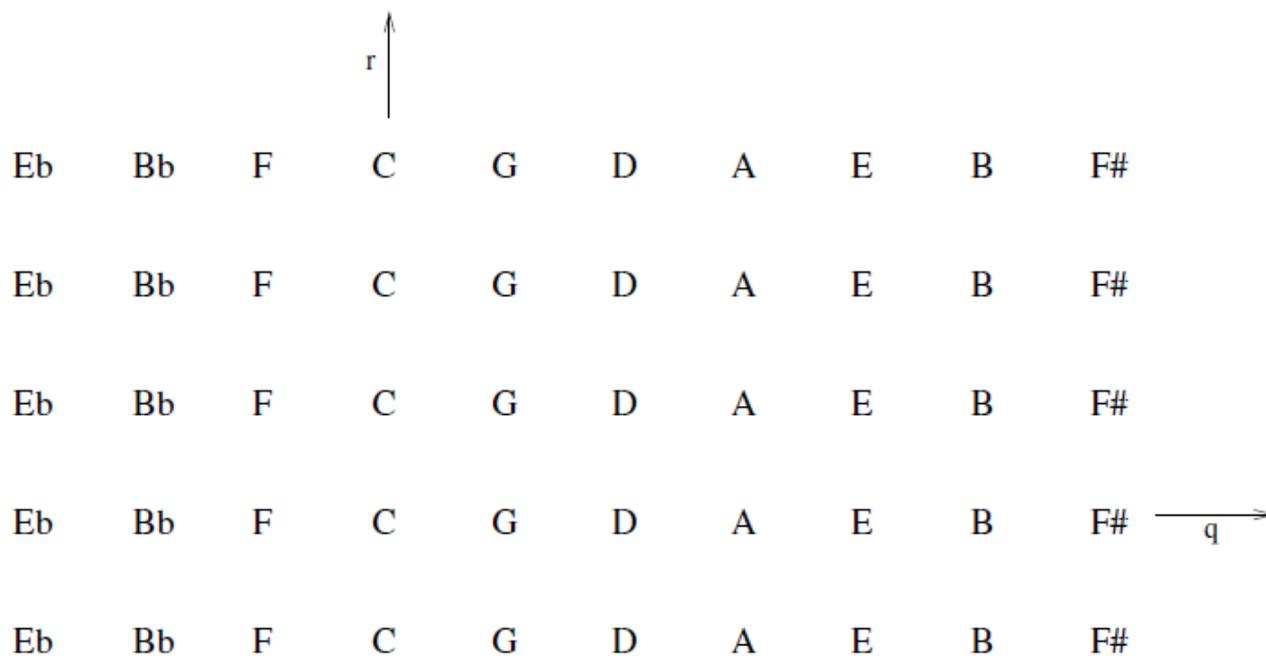


Figura 18: realizzazione parziale dei nomi delle note a partire dallo spazio costruito con intervallo di quinta (asse q) e comma sintonico (asse r).

elementi equivalenti) si sceglie all'interno dello spazio delle note. Ad esempio, alcuni possibili insiemi descritti dalla triade sono:

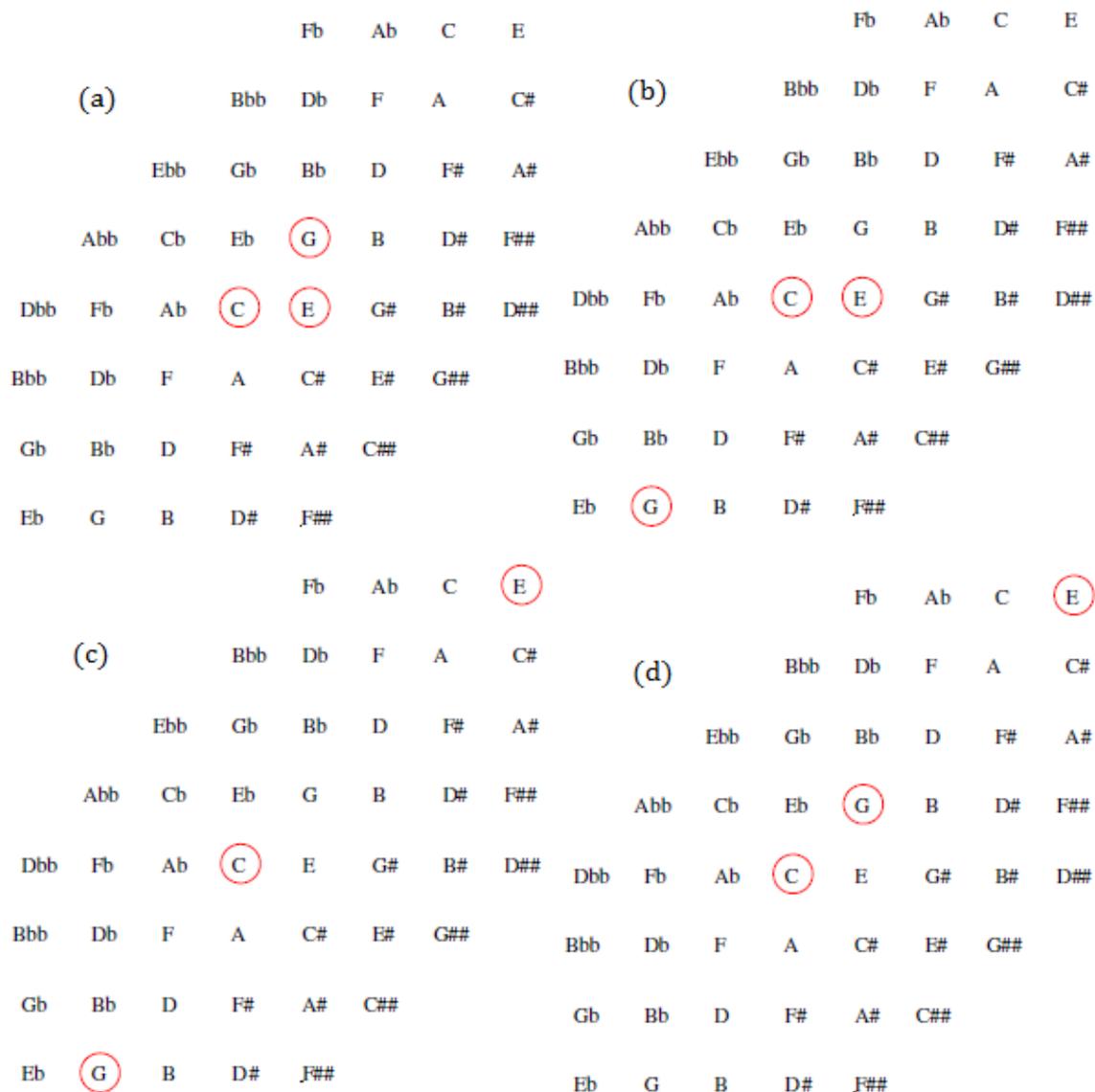


Figura 20: possibili configurazioni della triade maggiore Do – Mi – Sol.

Tutti e quattro gli insiemi descritti nelle figure sono equivalenti ad (a), e poiché in (a) è mostrata una formazione della triade come convesso sollevato (in particolare, la sua controimmagine è proprio $1 - 5:4 - 3:2$), allora ciascuno di quegli insiemi è convesso sollevato. Si può infine pensare di dare una definizione equivalente di sollevabilità convessa per lo spazio delle note MIDI: un insieme di note nello spazio di note MIDI si dice convesso sollevato se una delle sue possibili composizioni è l'immagine della proiezione di un insieme convesso nello spazio delle frequenze.

6.2 Osservazioni sul concetto di convessità e sollevabilità convessa nei reticoli

Si potrebbe suggerire che la proprietà di convessità e di sollevabilità convessa non sia indicativa in questi reticoli. Si potrebbe infatti pensare che la possibilità di ottenere un insieme convesso o un convesso sollevato prendendo dei punti in maniera casuale sia relativamente alta, e che dunque la proprietà di convessità e di sollevabilità siano proprietà insite alla costruzione degli spazi. Al fine di controllare la non sussistenza di questa ipotesi, Honingh ha mostrato, con un'apposita programmazione in Matlab, che le possibilità di prendere un convesso (eventualmente a stella o sollevato) scegliendo n punti casuali in un reticolo assumono un valore decisamente basso. Poiché non è possibile studiare la totalità del reticolo per motivi computazionali (si ricordi che il reticolo è illimitato), Honingh sceglie di studiare un reticolo 5×5 ed un reticolo 15×15 . Nel primo, fissato un numero n di elementi da considerare (tra cui compare sempre l'elemento unisono 1), si è scelto un numero sufficientemente ampio di insiemi composti da tali elementi; di questi, si è calcolato quali fossero convessi, stilando così una statistica in termini percentuali, i cui risultati sono mostrati in figura 21:

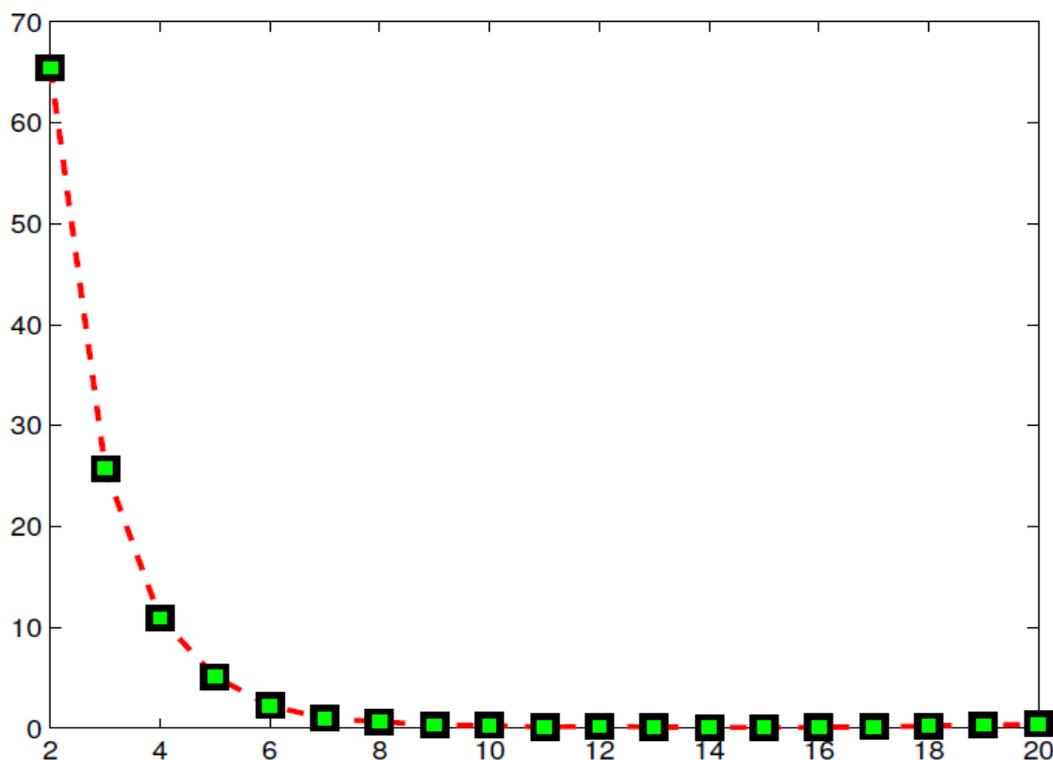


Figura 21: percentuali di insiemi convessi formati da n note in reticolo 5×5 . Sull'asse orizzontale è visualizzato il numero di note, sull'asse verticale la percentuale di insiemi convessi.

Come si nota dal grafico, la probabilità che un insieme sia convesso è una funzione monotona decrescente.

In maniera analoga si è calcolata la percentuale di convessi in un reticolo 15x15 al variare del numero di elementi contenuti nell'insieme. Si è scelta questa grandezza del reticolo perché è sufficientemente grande da contenere gli elementi delle scale musicali più utilizzate (costruite con un temperamento di ordine 5). Il reticolo è dunque molto più rappresentativo del reticolo campione 5x5. Per il calcolo delle percentuali si è seguito lo stesso processo per il calcolo nel reticolo 5x5. I risultati sono mostrati in figura:

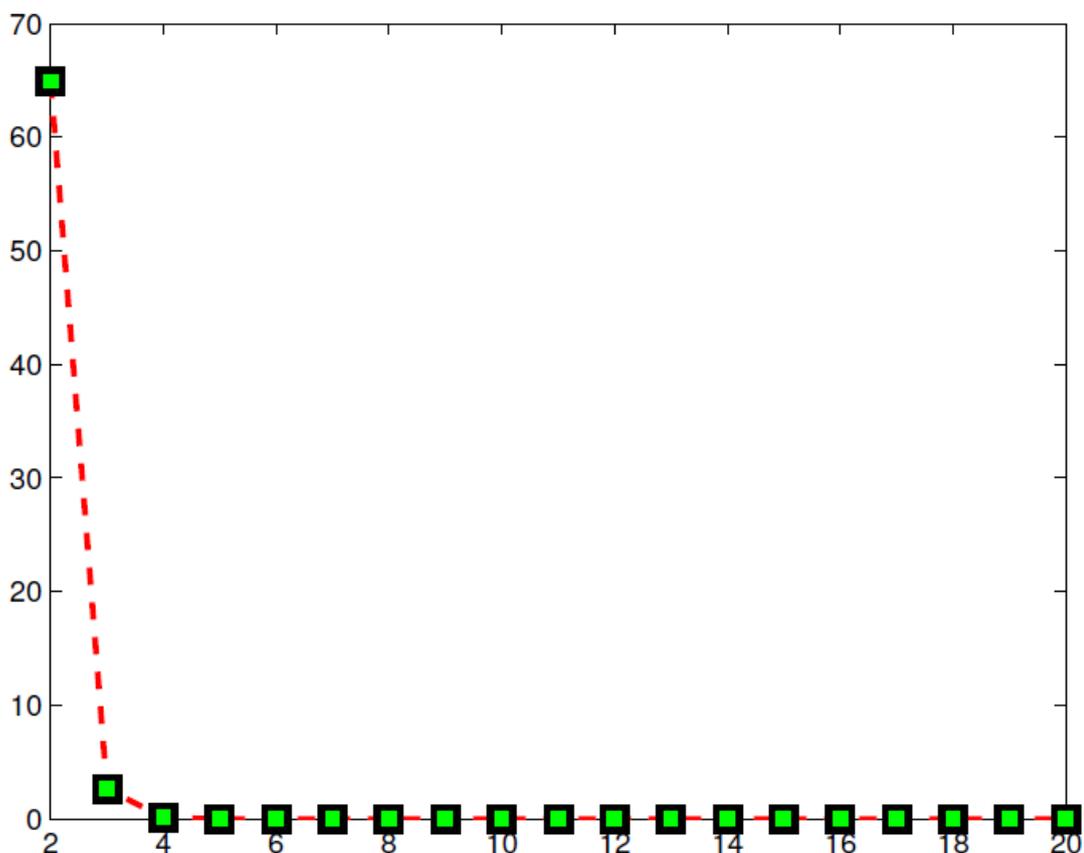


Figura 22: percentuali di insiemi convessi formati da n note in reticolo 15x15. Sull'asse orizzontale è visualizzato il numero di note, sull'asse verticale la percentuale di insiemi convessi.

Come si evince facilmente dal grafico, anche qui la probabilità è monotona decrescente. In questo reticolo, si nota ancora più come la convessità non sia una proprietà intrinseca dello spazio delle terze: scegliendo casualmente un insieme formato da due note (una delle quali corrispondente all'intervallo unisono), la probabilità che tale insieme sia convesso è del 65%. Tuttavia, la probabilità di creare un insieme convesso scegliendo casualmente tre note crolla a meno del 5%, mentre è

pressoché nulla la probabilità di trovare casualmente insiemi convessi formati da 4 o più note.

Stessi risultati si hanno nello studiare la possibilità che un insieme formato da elementi scelti casualmente sia convesso a stella:

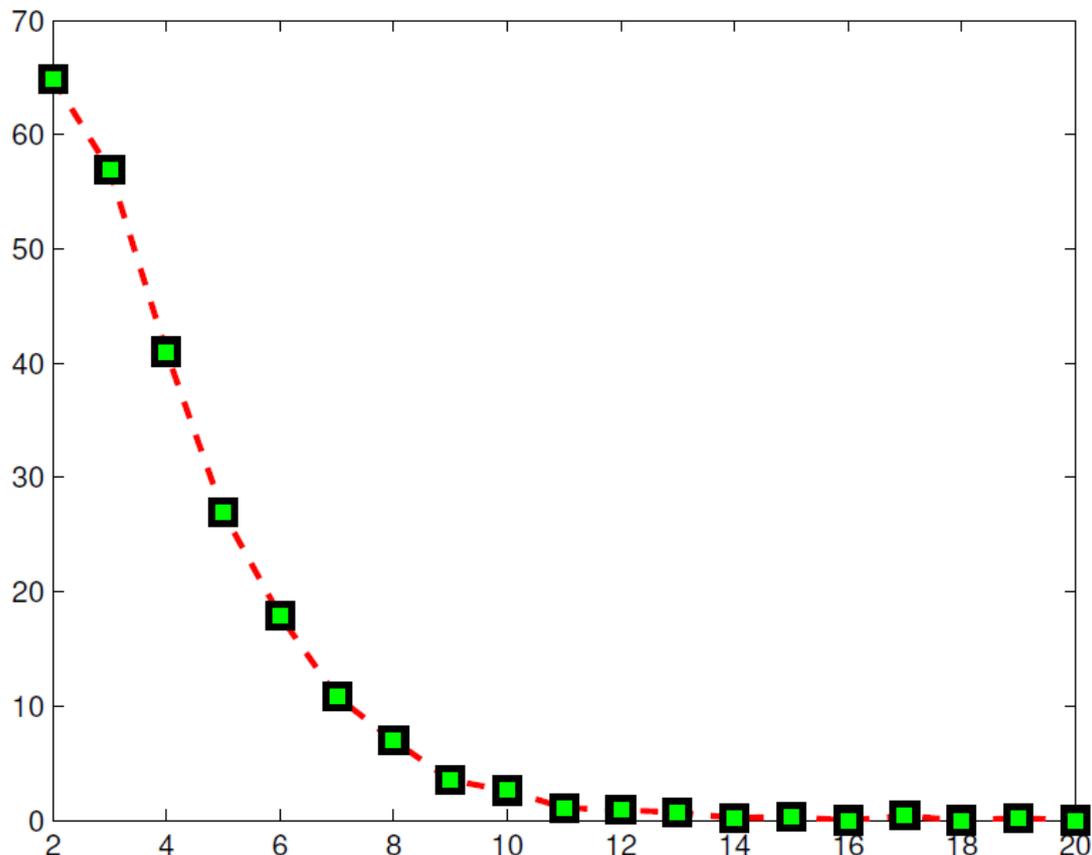


Figura 23: percentuali di insiemi convessi a stella formati da n note in reticolo 15x15. Sull'asse orizzontale è visualizzato il numero di note, sull'asse verticale la percentuale di insiemi convessi.

Si ha di nuovo una funzione monotona decrescente. Come da aspettativa, la probabilità di trovare un insieme convesso a stella è generalmente maggiore rispetto a quella di trovare un convesso, ma la possibilità di trovare un insieme convesso a stella di 7 o più elementi è comunque minore del 20%, ed è pressoché nulla dalle 12 note in su.

Un altro spunto di discussione potrebbe essere la scelta di studiare questi spazi come reticoli discreti e non come spazi continui. Tuttavia, uno studio in spazi continui non è possibile. Lo spazio delle terze è definito come $P_3 = \left\{ 2^p \left(\frac{5}{4}\right)^q \left(\frac{6}{5}\right)^r \mid p, q, r \in \mathbb{Z} \right\}$. In termini di coordinate, l'intervallo unisono 1:1 è indicato dal punto $O = (0, 0, 0)$, mentre l'intervallo di terza maggiore 5:4 è mappato in $M = (0, 1, 0)$. Ma nell'intervallo]1, 5:4[è compreso, tra gli altri, il rapporto di terza

minore $6:5$, che però non è mappato nel segmento \overline{OM} , bensì in $N = (0, 0, 1) \notin \overline{OM}$. Dunque non è possibile una proiezione dal reticolo ad uno spazio continuo.

In ultima istanza, si potrebbe proporre, come nel caso della compattezza, una misura di convessità. Ad esempio, si potrebbe assegnare una certa misura di convessità ad una circonferenza, maggiore della misura di convessità di un ovale molto schiacciato o di un poligono convesso a stella. Tuttavia, ricordando che un oggetto convesso rimane tale per cambiamenti di base, allora un insieme convesso potrebbe assumere, teoricamente, infinite forme diverse pur rimanendo convesso al cambiare della base, e non gli si potrebbe dunque associare un'univoca misura di convessità. In tal senso, l'unica distinzione all'interno degli insiemi convessi rimane quella tra convessità e convessità a stella.¹

¹ Da questo punto in poi, nel corso del capitolo si farà riferimento al termine "convesso" sia per insiemi convessi, sia per insiemi convessi a stella, sia per insiemi convessi sollevati, quando non specificato diversamente.

6.3 Compattezza e consonanza degli insiemi nello spazio P_3 e dei nomi delle note

Si è precedentemente visto che la proiezione da \hat{P}_3 allo spazio dei nomi delle note associa note dello stesso nome a rapporti tra loro differenti per uno o più commi sintonici. Nella costruzione degli insiemi nello spazio dei nomi che rappresentano gli accordi, potrebbero allora coesistere varie formazioni convesse. Un esempio è quello dell'accordo di quinta *Do – Sol*, che può essere visto formato sia dagli intervalli $1 - 3:2$, sia dagli intervalli $1 - 40:27$, entrambi convessi; si dovrebbe dunque stabilire un metodo per scegliere quale sia la configurazione da preferire nel caso vi fossero ambiguità.

Si sono stabiliti due criteri base, comunemente accettati, per scegliere una configurazione preferita in caso di ambiguità:

1. Rapporti con piccoli numeri (quando ridotti ai minimi termini) devono essere preferiti nel caso di ambiguità;
2. Rapporti derivati come combinazione lineare di rapporti preferiti secondo il punto 1 devono essere preferiti nel caso di ambiguità.

Ad esempio, nel caso sopra portato dell'accordo di quinta, è ovvio che, per il criterio 1, la configurazione $1 - 3:2$ sia da preferire.

Tuttavia, è chiaro che possono esistere anche insiemi che, presentandosi in più configurazioni, possano averne differenti che continuino a risultare equivalentemente preferite secondo un criterio o l'altro, essendo questi non necessariamente in accordo. Un esempio ne è l'accordo di settima dominante *Do – Mi – Sol – Sib*, formato dagli intervalli $1 - 3:2 - 5:4 - 9:5$ oppure $1 - 3:2 - 5:4 - 16:9$, il primo preferito dal criterio 1 ($9:5$ è chiaramente una frazione più "semplice" di $16:9$), il secondo preferito dal criterio 2 (essendo $16:9$ la composizione di due intervalli di quarta $4:3$ sopra alla tonica, mentre $9:5$ è la composizione di una quinta $3:2$ ed una sesta minore $6:5$, quest'ultima descritta da un intervallo non preferito all'intervallo di quarta secondo il criterio 1).

Per questo motivo, Honingh propone di utilizzare come criterio quello della compattezza dell'insieme: poiché l'intero spazio P_3 viene costituito da potenze di 2, 3 e 5, note vicine avranno più numeri primi in comune; dunque, tanto più compatto sarà l'insieme formato da tali note, tanto più piccolo sarà il rapporto da esse definito. Tuttavia, a differenza della convessità, la compattezza non si mantiene per cambiamenti di base. Stessi insiemi assumono diversi valori di misura di compattezza

al variare della base, dunque si devono fissare i due generatori una volta per tutte (tenendo fisso l'intervallo d'ottava come primo generatore per un temperamento di ordine 5). Si sceglie dunque l'insieme di generatori composto dall'intervallo di ottava 2: 1, di quinta 3: 2 e di terza maggiore 5: 4, i generatori più consonanti secondo la misura di consonanza di Eulero^{2,3}.

Le ipotesi che propone Honingh affermano quanto segue:

1. l'intonazione preferita di un accordo è quella che si configura come la più compatta tra le possibili configurazioni convesse;
2. l'intonazione preferita di un accordo è quella che si configura come la più compatta.

Il concetto di "preferenza" è collegato alla componente empirica della percezione umana; tuttavia, può essere studiata tramite la misura di consonanza di Eulero.

Dato $I = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme finito, si è definita la misura di compattezza di X come:

$$C(I) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} |x_i - x_j| = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2 + \dots + (x_{in} - x_{jn})^2}$$

Nel caso in questione, sarà sufficiente studiare la misura di compattezza per insiemi nei reticoli \hat{P}_3 e P_3 ; in particolare, lo studio di Honingh si concentra sui reticoli 9×9 e $9 \times 9 \times 9$ centrati sull'elemento 1: 1. Nel caso tridimensionale, note che si differenziano per un comma sintonico pari a $81:80 = 2^{-4}3^45^{-1}$ hanno stesso nome; dunque, in coordinate, due note che formano un vettore di coordinate $(-4, 4, -1)$ sono tra loro equivalenti per la formazione di un accordo. Dunque, l'insieme $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{Z}^3$ è configurazione di un accordo che può essere riscritto equivalentemente sostituendo all'elemento generico x_i il suo equivalente traslato:

$$\bar{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} - 4k_i \\ x_{i2} + 4k_i \\ x_{i3} - k_i \end{pmatrix}, \quad k_i \in \mathbb{Z}$$

La misura di compattezza può essere rielaborata come:

$$C(I) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \sqrt{X_1 + X_2 + X_3}$$

² Come si può ricordare dal Capitolo 4, l'intervallo 4: 3 è considerato più consonante dell'intervallo 5: 4, ma è facile notare che $\left\{2^p \left(\frac{3}{2}\right)^q \left(\frac{4}{3}\right)^r \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\right\} \neq \{2^p 3^q 5^r \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\} = P_3$, e dunque la terna di intervalli 2: 1, 3: 2 e 4: 3 non è base per P_3 .

³ Tra le misure di consonanza a disposizione in questa tesi, si è scelta qui quella di Eulero, essendo la misura di Helmholtz dipendente da elementi sperimentali (come i valori B, B' relativi alle velocità massime delle vibrazioni indotte nell'organo del Corti) di difficile individuazione in uno studio teorico degli intervalli in isolamento.

con:

$$X_1 = (x_{i1} - x_{j1} - 4(k_i - k_j))^2$$

$$X_2 = (x_{i2} - x_{j2} + 4(k_i - k_j))^2$$

$$X_3 = (x_{i3} - x_{j3} - (k_i - k_j))^2$$

A questo punto, la configurazione più compatta dell'insieme I è data dai valori k_1, k_2, \dots, k_n per cui $C(X)$ assume il valore minimo.

Si è già detto nel corso del Capitolo 2 che la misura di consonanza di un intervallo $x:y$ (dove il rapporto è già ridotto ai minimi termini) viene definita come:

$$\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) = \Gamma(x \cdot y)$$

Ma un accordo è definito da più di un intervallo. Siano $x_1:y_1, x_2:y_2, \dots, x_n:y_n$ i rapporti, ridotti ai minimi termini, che descrivono gli intervalli che formano l'accordo. Allora l'accordo può essere espresso come:

$$\frac{x_1}{y_1} : \frac{x_2}{y_2} : \dots : \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1 Y}{y_1 Y} : \frac{x_2 Y}{y_2 Y} : \dots : \frac{x_n Y}{y_n Y}$$

dove $Y = mcm(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Moltiplicando tutto per Y , l'accordo è allora rappresentato da:

$$x_1 \frac{Y}{y_1} : x_2 \frac{Y}{y_2} : \dots : x_n \frac{Y}{y_n} = X_1 : X_2 : \dots : X_n$$

dove $X_i \in \mathbb{N} \forall i$. A questo punto, si pone:

$$\Gamma(I) = \Gamma\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}\right) = \Gamma(X_1, X_2, \dots, X_n) = \Gamma(mcm(X_1, X_2, \dots, X_n))$$

Ad esempio, la triade maggiore *Do – Mi – Sol* è definita dagli intervalli $1:1 - 5:4 - 3:2$. Essendo $Y = mcm(1, 2, 4) = 4$, allora la triade è definita da:

$$1 \cdot \frac{4}{1} : 5 \cdot \frac{4}{4} : 3 \cdot \frac{4}{2} = 4:5:6$$

E dunque:

$$\Gamma\left(\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) = \Gamma(4, 5, 6) = \Gamma(mcm(4, 5, 6)) = \Gamma(60) = 9$$

Come per quanto studiato con la misura di compattezza, anche la misura di consonanza può variare a seconda di come si forma l'accordo. Un accordo descritto come $X_1: X_2: \dots : X_n$ può essere visto nella forma:

$$X_1: X_2: \dots : X_n = 2^{x_{11}-4k_1} \cdot 3^{x_{12}-4k_1} \cdot 5^{x_{13}-4k_1}; 2^{x_{21}-4k_2} \cdot 3^{x_{22}-4k_2} \cdot 5^{x_{23}-4k_2}; \dots \\ : 2^{x_{n1}-4k_n} \cdot 3^{x_{n2}-4k_n} \cdot 5^{x_{n3}-4k_n}$$

Per il calcolo del minimo comune multiplo, allora si avrà:

$$mcm(X_1, X_2, \dots, X_n) = 2^{M_1} \cdot 3^{M_2} \cdot 5^{M_3}$$

con:

$$M_1 = \max \{x_{11} - 4k_1, \dots, x_{n1} - 4k_n\}$$

$$M_2 = \max \{x_{12} - 4k_1, \dots, x_{n2} - 4k_n\}$$

$$M_3 = \max \{x_{13} - 4k_1, \dots, x_{n3} - 4k_n\}$$

Il valore della misura di consonanza di Eulero si trasforma allora in:

$$\Gamma(I) = \Gamma(X_1, X_2, \dots, X_n) = \Gamma(mcm(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \Gamma(2^{M_1} \cdot 3^{M_2} \cdot 5^{M_3})$$

A questo punto, verificare le ipotesi di Honingh equivale a verificare che il vettore $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ per cui $C(I)$ ha un minimo è lo stesso per cui $\Gamma(I)$ ha un minimo⁴, in assenza o meno della proprietà di convessità. Analogamente si lavora per il caso bidimensionale, ricordando però che un elemento in \hat{P}_3 dipende solo dai valori delle potenze di 3 e 5, dunque il valore M_1 ricercato per il calcolo di $\Gamma(I)$ sarà tale che $mcm(X_1, X_2, \dots, X_n) = 2^{M_1} \cdot 3^{M_2} \cdot 5^{M_3} \in [1, 2[$. Rimangono inalterati i valori di M_2, M_3 , mentre il valore $C(I)$ si semplifica in $C(I) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \sqrt{X_2 + X_3}$.

In tabella vengono mostrate le percentuali⁵ degli accordi che verificano l'ipotesi di Honingh:

RETICOLO	NUMERO DI NOTE	PERCENTUALE
9x9	2	97,5%
9x9	3	85,4%
9x9	4	76,8%
9x9x9	2	86,5%
9x9x9	3	70,1%

⁴ Si ricordi che la misura di consonanza di Eulero definisce un intervallo, o un insieme di intervalli, tanto più consonante quanto più è basso il valore della sua misura.

⁵ La percentuale è calcolata come rapporto tra il numero di accordi per cui $C(I)$ e $\Gamma(I)$ assumono minimo per lo stesso valore di K ed il totale degli accordi costruibili con n toni nei relativi reticoli.

6.4 Risultati e considerazioni

Honingh testa le sue ipotesi su convessità, compattezza e consonanza per insiemi di 2, 3 e 4 note all'interno del reticolo 9×9 . Si può dare una rappresentazione insiemistica dei risultati:

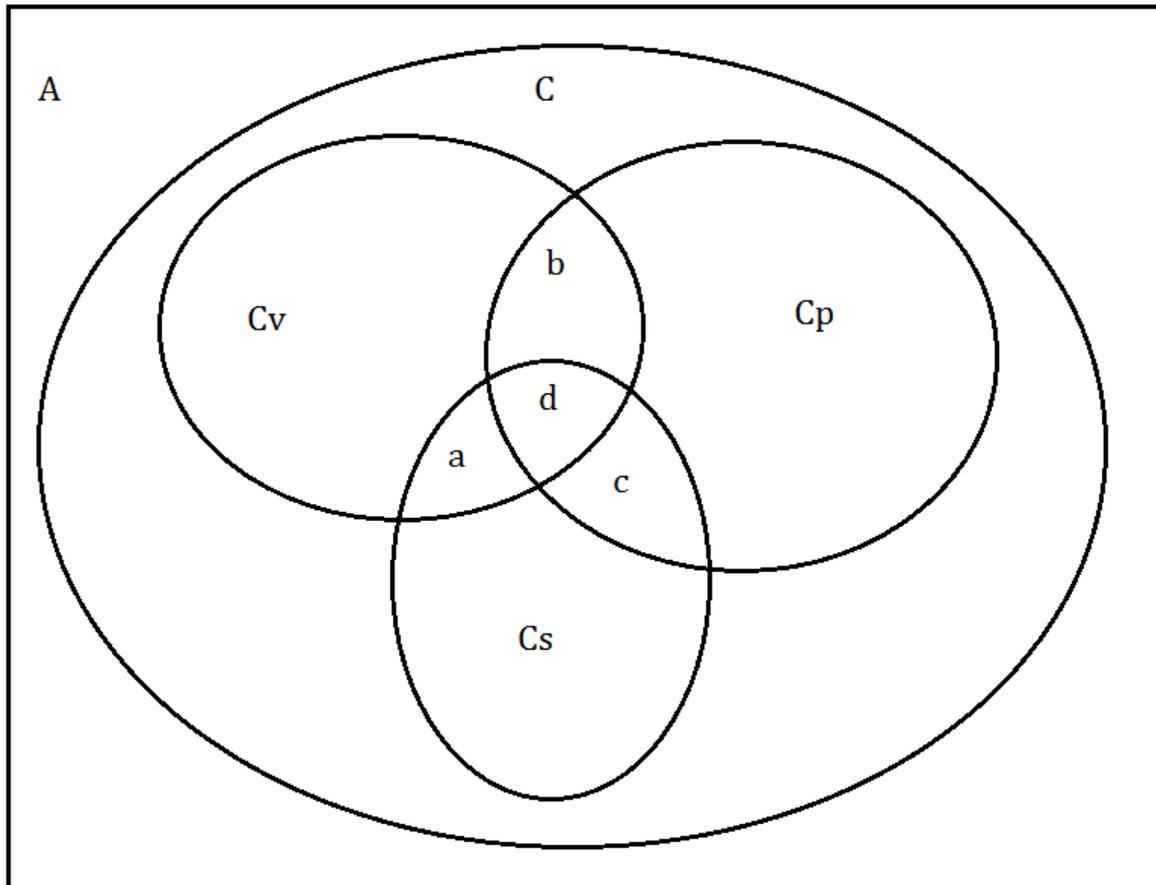


Figura 24: illustrazione insiemistica delle proprietà degli accordi.

In figura, l'insieme A rappresenta l'insieme dei possibili accordi di n note costruibili con gli elementi del reticolo 9×9 . L'insieme C rappresenta l'insieme di tutte le configurazioni di accordi che ammettono configurazione convessa. All'interno di C si trovano gli insiemi:

- C_v : insieme delle configurazioni convesse;
- C_p : insieme delle configurazioni compatte;
- C_s : insieme delle configurazioni più consonanti secondo la misura di consonanza di Eulero.

Gli insiemi a, b, c, d sono le intersezioni dei precedenti. In dettaglio, si hanno:

- $a \cup d = \text{convessi} \cap \text{consonanti}$
- $b \cup d = \text{convessi} \cap \text{compatti}$
- $c \cup d = \text{consonanti} \cap \text{compatti}$
- $d = \text{convessi} \cap \text{consonanti} \cap \text{compatti}$

Non sono presenti le configurazioni compatte e consonanti che non ammettono configurazione convessa.

Per cercare verifica delle ipotesi di Honingh si devono trovare le misure degli insiemi $a \cup d, b \cup d, c \cup d, d$. Questo viene fatto in termini percentuali, calcolando tale valore come il numero di accordi presenti in ogni singolo insieme sul totale degli accordi che ammettono configurazione convessa. Si noti che tale numero non equivale al numero degli elementi di \mathcal{C} , dato che tale insieme rappresenta le possibili configurazioni di ogni accordo che ammette configurazione convessa, non gli accordi in sé.

Honingh elabora un programma di calcolo in Matlab che trovi tutti i possibili insiemi di 2, 3 e 4 note nel reticolo, e calcoli per ogni insieme:

- Se l'insieme ammetta configurazione convessa, e, in caso affermativo, quali esse siano;
- La configurazione più compatta;
- La configurazione più consonante (secondo la misura di Eulero).

Per tali calcoli, si è introdotta la variabile vettoriale K descritta nel precedente paragrafo. I valori di ogni singolo k variano tra -2 e 2 ; un'ampiezza maggiore avrebbe prodotto valori per cui gli elementi corrispondenti sarebbero ricaduti al di fuori del reticolo preso in considerazione. Questo avrebbe potuto indurre alla scelta di un reticolo più grande; tuttavia, facendo un test a breve termine con il programma su reticoli più grandi, si è trovato che le percentuali ricercate non variavano significativamente. La ragione alla base di questo risultato è che quanto più gli insiemi sono compatti, tanto meglio tendono ad adagiarsi in reticoli di piccole dimensioni; dunque, essendo la ricerca orientata a trovare gli insiemi maggiormente compatti, non risulta necessario studiare reticoli di grandi dimensioni.

Per la costruzione dei possibili insiemi, un punto viene tenuto fisso, ovvero quello relativo all'intervallo unisono. Dunque, per accordi di 2 note, un solo elemento viene fatto variare; per accordi di 3 note variano due elementi; per accordi di 4 note, variano 3 elementi. Per assicurarsi che non vi siano doppioni, l'elemento $i + 1$ -esimo viene fatto variare sui punti in cui non è stato fatto variare l'elemento i -esimo (per $i = 2, 3$, essendoci al massimo 4 elementi, ed essendo il primo fissato sull'intervallo unisono). Essendoci un totale di $9 \times 9 = 81$ punti nel reticolo, ma essendone uno

fissato nella costruzione dell'accordo, allora i restanti $n - 1$ elementi dell'accordo possono variare su un totale di 80 punti. Un accordo di n note può variare allora in $\binom{80}{n-1}$ modi diversi. Questo significa che esistono 80 accordi di 2 elementi, 3160 accordi di 3 elementi e 82160 accordi di 4 elementi. Osservando come la funzione incrementi velocemente all'aumentare di n , Honingh sceglie, per motivi computazionali di non proseguire oltre il valore di $n = 4$.

Nella seguente tabella, sono indicati i risultati forniti dal programma:

TIPO DI INSIEME	PERCENTUALE PER:		
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$a \cup d$	11,3%	40,8%	36,0%
$b \cup d$	16,3%	41,4%	41,2%
$c \cup d$	97,5%	85,4%	85,6%
d	11,3%	37,3%	34,1%
NUMERO DI INSIEMI ESAMINATI	80	1590	14810

Il numero degli insiemi esaminati non corrisponde, generalmente, al valore $\binom{80}{n-1}$ perché, come si è detto, si sono considerati solo gli insiemi che ammettono configurazione convessa. Si nota che, per $n = 2$, tutti gli insiemi ammettono configurazione convessa, ma ciò non continua a valere per valori maggiori di n .

Una prima considerazione è che la maggiore correlazione sussiste tra consonanza e compattezza, come da ipotesi 2. La correlazione tra convessità e le altre proprietà è invece minima per $n = 2$ e sale per valori maggiori di n . Le regioni a e d risultano molto piccole, e sono tanto più piccole quanto più è basso il valore di n (si noti che per $n = 2$ le due regioni coincidono, dunque a ha misura nulla); questo implica che quando una configurazione consonante risulta anche convessa, allora avrà un'alta probabilità di essere anche la più compatta, e quando la configurazione più compatta risulta convessa, allora avrà un'alta probabilità di essere anche consonante.

Come risultato, si è stabilito che la convessità di un insieme non indica, generalmente, che l'accordo ad esso correlato sarà consonante. A fronte di tale risultato, Honingh propone di modificare il concetto di convesso nello spazio dei nomi (ovvero sollevabilità convessa) in: un insieme nello spazio dei nomi si definisce convesso (sollevato) se la più compatta configurazione dell'insieme nello spazio dei rapporti di frequenza è convessa.

CAPITOLO 7: CONCLUSIONI

Nel corso di questa tesi, si è affrontato il discorso della costruzione e della caratterizzazione delle proprietà musicali e matematiche dei temperamenti musicali.

Nel quarto capitolo si è visto come gli studi in materia di consonanza degli intervalli all'interno di un sistema temperato possano corroborare la pratica della teoria delle frazioni continue per la costruzione degli stessi. Questa teoria è difatti in grado di stabilire una buona approssimazione dell'immagine logaritmica del rapporto relativo all'intervallo di quinta, che viene poi utilizzato come base per l'approssimazione dell'intero temperamento naturale di partenza: a partire da questo valore, si è in grado di stabilire in quante note suddividere l'ottava, ed a quale posizione far corrispondere l'intervallo di quinta. Nel corso del Capitolo 3, in relazione ai temperamenti equabili, si era stabilito che, per motivi legati alle proprietà biofisiche dell'orecchio, un temperamento equabile non poteva essere costruito con un numero grande a piacere di note; sulla base di questa considerazione, e per motivi computazionali, nel Capitolo 4 si è limitato lo studio delle proprietà di consonanza degli intervalli per temperamenti equabili fino ad un massimo di 55 note. Ne è risultato che la suddivisione di un temperamento equabile in 12, 41 o 53 note (come previsto dalla teoria delle frazioni continue) si configura come una buona approssimazione di un temperamento naturale indipendentemente dalla misura di consonanza utilizzata e dagli intervalli di riferimento. Al fianco di questi valori per la suddivisione dell'ottava si sono ritrovate anche altre suddivisioni che portano ad un diverso grado di qualità di approssimazione (talvolta minore, talvolta maggiore), ma che dipendono dal tipo di misura di consonanza e dagli intervalli di riferimento scelti.

Nel quinto capitolo si è data una descrizione algebrica e geometrica dei temperamenti naturali. Si è visto come il generico temperamento naturale di ordine n costituisca un gruppo con l'operazione binaria di moltiplicazione, e lo si è messo in relazione tramite isomorfismo con il gruppo costituito dall'insieme di vettori a valori interi munito dell'operazione di somma vettoriale. Si sono, a questo punto, identificati tra loro intervalli che differivano per una o più ottave, e se ne è scelto il rappresentante che giace all'interno dell'intervallo di ottava. In questo modo, si è potuto costruire lo spazio delle frequenze in due dimensioni. Si è mostrato quindi come questo gruppo abbia infinite coppie di generatori, e si è seguito Balzano nello scegliere terza maggiore e minore come intervalli generatori per la costruzione dello spazio (dunque definito spazio delle terze). A questo punto, da tale spazio si sono costruiti gli spazi dei nomi delle note e della numerazione MIDI. Da questi due spazi sono nate le considerazioni che il sistema di nomenclatura occidentale non sia

sufficiente per descrivere un temperamento naturale di ordine 5 e che il numero di note in cui suddividere l'ottava per costruire un temperamento equabile possa avere delle motivazioni geometriche alla base. Tra queste ultime considerazioni geometriche, ritorna la presenza della divisione dell'ottava in 12 note. Infine, si è mostrato come la ciclicità di alcuni elementi presenti in questi ultimi due spazi sia utilizzabile come base per la costruzione di elementi geometrici tridimensionali come il cilindro ed il toro.

Nel sesto capitolo si sono studiate le relazioni tra il maggior grado di consonanza degli intervalli e degli accordi, ed il fatto che essi costituiscano degli insiemi convessi e/o compatti negli spazi, come proposto da Honingh. Si è iniziato con lo studio del concetto di convessità nei reticoli costruiti nel quinto capitolo, e si è mostrato che la proprietà di convessità si mantiene per cambiamenti di base. Si è definito poi il concetto di sollevabilità convessa per studiare la proprietà di convessità negli spazi dei nomi delle note e nello spazio della numerazione MIDI. Alcune osservazioni sono state portate a riprova che la proprietà di convessità è una proprietà notevole in questi spazi, e che non è possibile proporre una misura di convessità né uno studio su spazi continui per questa materia. Reintrodotta il concetto di misura di compattezza dal Capitolo 2 e di misura di consonanza dal Capitolo 4, se ne sono rielaborate le definizioni e le proprietà per generalizzare la prima a spazi n dimensionali, ed applicare la seconda ad accordi. Infine, si sono calcolate le percentuali di accordi in cui i concetti di convessità, concavità e consonanza sono legati. Si è concluso che la maggior compattezza può essere generalmente indice di consonanza, mentre non vale lo stesso per la convessità.

Potenziati miglioramenti allo studio di quest'ultimo tema potrebbero venire dalla Ricerca Operativa. Stando a quanto descritto da Honingh, i procedimenti per il calcolo del vettore K che minimizzasse contemporaneamente i valori di $C(I)$ e $\Gamma(I)$ sono stati tutti prettamente analitici. Questo portava, in taluni casi, ad avere per soluzione vettori a valori razionali; d'altro canto, i valori di K dovrebbero essere interi (onde mantenere la differenza tra note dello stesso nome pari ad un multiplo intero del comma sintonico). Honingh fa notare che arrotondando i valori ottenuti all'intero più vicino non sempre fornisce una soluzione ottimale. Questo problema potrebbe quindi essere risolto tramite l'utilizzo di modelli di programmazione non-lineare intera.

BIBLIOGRAFIA

- Balzano, G. (1980), *The Group-Theoretic Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems*, Computer Music Journal, Vol. 4, No. 4, pp. 66-84.
- Carey, N. & Clampitt, D. (1989), *Aspects of well-formed scales*, Music Theory Spectrum, Vol. 11, No. 2, pp. 187-206.
- Forster, C. M. L. (2010), *Musical mathematics: on the art and science of acoustic instruments*, Chronicle Books.
- Hall, D. E. (1988), *Acoustical Numerology and Lucky Temperaments*, American Journal of Physics, Vol. 56, No. 4, pp. 329-333.
- Honingh, A. (2003), *Group Theoretic Description of Just Intonation*, Institute for Logic, Language and Computation, Università di Amsterdam.
- Honingh, A. (2006), *The Origin and Well-Formedness of Tonal Pitch Structures*, Institute for Logic, Language and Computation, Università di Amsterdam.
- Isola, S., *Dinamica Discreta Unidimensionale*, Università di Camerino, reperibile all'indirizzo internet: <http://unicam.it/~stefano.isola/materiale.html>
- Isola, S., *Temperamenti: Matematica e Teoria Musicale*, Università di Camerino, reperibile all'indirizzo internet: <http://unicam.it/~stefano.isola/materiale.html>
- Kameoka, A. & Kuriyagawa, M. (1969a), *Consonance Theory part I*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 45, No. 6, pp. 1451-1459.
- Kameoka, A. & Kuriyagawa, M. (1969b), *Consonance Theory part II*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 45, No. 6, pp. 1460-1469.
- Krantz, J. & Douthett, J. (1994), *A Measure of The Reasonableness of Equal-Tempered Musical Scales*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 95, No. 6, pp. 3642-3650.
- Noll, T. (2008), *Sturmian Sequences and Morphisms, A Musical-Theoretical Application*, Journée annuelle, pp. 79-102.
- Plomp, R. & Levelt, W. J. (1965), *Tonal consonance and critical bandwidth*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 38, pp. 548-560.
- Sethares, W. (1993), *Local consonance and the relationship between timbre and scale*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 94, No. 3, pp. 1218-1228.
- Terhardt, E. (1974), *Pitch, Consonance and harmony*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 55, No. 5, pp. 1061-1069.

Terhardt, E., Stoll, G. & Seewann, M. (1982), *Algorithm for extraction of pitch and pitch salience from complex tone signals*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 71, No. 3, pp. 679-688.

Zweifel, P. (1996), *Generalized diatonic and pentatonic scales: a group-theoretic approach*, Perspectives of New Music, Vol. 34, No. 1, pp. 140-161.

Zwicker, A. & Fastl, H. (1990), *Psychoacoustics: facts and models*, 3rd edition, Springer-Verlag.